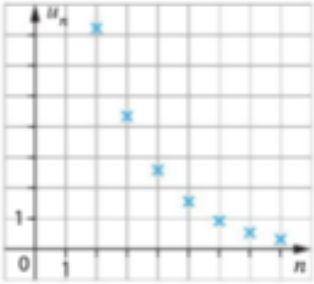
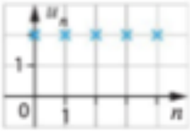
Ce qu'il faut retenir

Variation des suites géométriques de premier terme u_0 positif et de raison $q > 0$

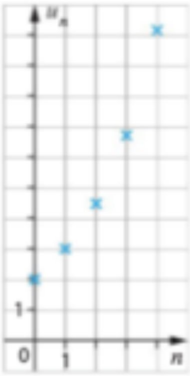
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
Lorsque les valeurs de n augmentent, les valeurs de u_n diminuent.



- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.



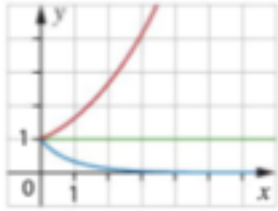
- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
Lorsque les valeurs de n augmentent, les valeurs de u_n augmentent.



Variation des fonctions exponentielles

Soit a un réel strictement positif.

- Si $a > 1$, alors la fonction f définie par $f(x) = a^x$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
- Si $0 < a < 1$, alors la fonction f définie par $f(x) = a^x$ est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
- Si $a = 1$, alors la fonction f définie par $f(x) = 1^x = 1$ est constante sur $[0\,;+\infty[$.



Soit k un réel non nul.

- Si $k > 0$, alors les fonctions f et g définies par $f(x) = a^x$ et $g(x) = ka^x$ ont le même sens de variation.
- Si $k < 0$, alors les fonctions f et g définies par $f(x) = a^x$ et $g(x) = ka^x$ ont des sens de variation contraires.

Augmentations successives

On considère une quantité P et un taux d'évolution de t %.

- Lorsque P subit n augmentations successives de t %, alors la nouvelle valeur de P est égale à $P \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$.
- Lorsque P subit n diminutions successives de t %, alors la nouvelle valeur de P est égale à $P \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)^n$.

Taux d'évolution moyen

Soit P une quantité.

- P subit une augmentation de taux $\frac{T}{100}$ équivaut à P subit n augmentations successives de taux moyen égal à $\left(1 + \frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$, arrondi à une valeur décimale souvent exprimée en %.
- P subit une diminution de taux $\frac{T}{100}$ équivaut à P subit n diminutions successives de taux moyen égal à $1 - \left(1 - \frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{n}}$, arrondi à une valeur décimale souvent exprimée en %.

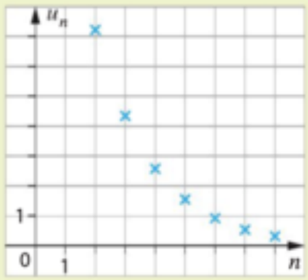
Sens de variation des modèles exponentiels : Sens de variation des suites géométriques

Propriété

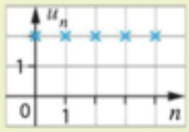
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$.

- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Lorsque les valeurs de n augmentent, les valeurs de u_n diminuent.

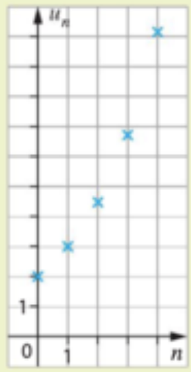


- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.



- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

Lorsque les valeurs de n augmentent, les valeurs de u_n augmentent.



Savoir-Faire

Méthode 1 Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique

Déterminer le sens de variation des suites géométriques définies ci-dessous.

1. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = \frac{1}{5}$.
2. (v_n) est la suite géométrique définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{3^n}{4^n}$.
3. (w_n) est la suite géométrique définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = 0{,}3 \times 1{,}1^n$.
4. (t_n) est la suite géométrique définie par $t_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, par $t_{n+1} = 0{,}4t_n$.

Solution commentée

1. $u_0 > 0$.
La raison de la suite (u_n) est $q = \frac{1}{5}$.
Or $0 < \frac{1}{5} < 1$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. $v_0 > 0$.
Pour tout entier naturel n, on a $v_n = \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
La raison de (v_n) est donc $\frac{3}{4}$.
Or $0 < \frac{3}{4} < 1$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

3. $w_0 > 0$.
La suite (w_n) est définie par sa formule explicite. Sa raison est $q = 1{,}1$.
Or $1{,}1 > 1$, donc la suite (w_n) est strictement croissante.

4. $t_0 > 0$.
La suite (t_n) est définie par sa relation de récurrence. Sa raison est $q = 0{,}4$.
Or $0 < 0{,}4 < 1$, donc la suite (t_n) est strictement décroissante.

À TON TOUR

Savoir-Faire (Suite)

Déterminer le sens de variation des suites géométriques ci-dessous.

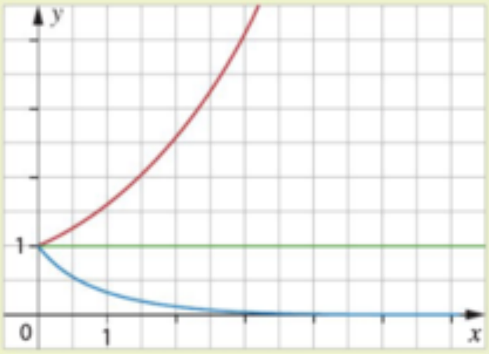
1. (u_n) est définie par $u_0 = 1{,}1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \frac{2u_n}{3}$.
2. (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 3 \times \left(\frac{1}{0{,}3}\right)^n$.
3. (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 4 \times \frac{2^n}{5^n}$.

Sens de variation des modèles exponentiels : Sens de variation des fonctions géométriques

Propriété

Soit a un réel strictement positif.

- Si $a > 1$, alors la fonction f définie par $f(x) = a^x$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
- Si $0 < a < 1$, alors la fonction f définie par $f(x) = a^x$ est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
- Si $a = 1$, alors la fonction f définie par $f(x) = 1^x = 1$ est constante sur $[0\,;+\infty[$.



Propriété

Soit k un réel non nul.

- Si $k > 0$, alors les fonctions f et g définies par $f(x) = a^x$ et $g(x) = ka^x$ ont le même sens de variation.
- Si $k < 0$, alors les fonctions f et g définies par $f(x) = a^x$ et $g(x) = ka^x$ ont des sens de variation contraires.

Savoir-Faire	**Méthode 2 Déterminer le sens de variation d'une fonction exponentielle** Déterminer le sens de variation des fonctions exponentielles suivantes. 1 $f(x)=0{,}7^x$ 2 $g(x)=-3\times 2{,}6^x$ 3 $h(x)=\frac{5^x}{8^x}$ 4 $p(x)=5\left(\frac{1}{0{,}4}\right)^x$ **Solution commentée** 1 La fonction f est une fonction exponentielle de base 0,7. Or $0<0{,}7<1$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$. 2 La fonction exponentielle de base $2{,}6>1$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. On a $g(x)=-3\times 2{,}6^x$ avec $-3<0$. Donc la fonction g a un sens de variation contraire à celui de la fonction exponentielle de base 2,6. La fonction g est donc strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$. 3 $h(x)=\frac{5^x}{8^x}=\left(\frac{5}{8}\right)^x$. La fonction h est une fonction exponentielle de base $\frac{5}{8}=0{,}625$. Or $0<0{,}625<1$, donc la fonction h est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$. 4 La fonction exponentielle de base $\frac{1}{0{,}4}>1$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. On a $p(x)=5\times\left(\frac{1}{0{,}4}\right)^x$, avec $5>0$. La fonction p a donc le même sens de variation que celui de la fonction exponentielle de base $\frac{1}{0{,}4}$. La fonction p est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. À TON TOUR
Savoir-Faire (Suite)	Déterminer le sens de variation des fonctions exponentielles définies pour tout réel $x\geqslant 0$ ci-dessous. a. $f(x)=-1{,}2^x$ b. $g(x)=-2\times 0{,}1^x$ c. $h(x)=\frac{1{,}5^x}{3^x}$ d. $u(x)=-0{,}4\times\frac{2{,}5^{2x+1}}{2{,}5^x}$

Taux d'évolution moyen : Evolutions successives	
Définition	On appelle taux d'évolution tout nombre décimal positif. Le plus souvent, un taux s'écrit sous la forme d'une fraction de dénominateur 100 ou sous la forme d'un pourcentage.
Exemple	$\frac{3}{100}=0{,}03=3\ \%$ est un taux de 3 %.
Propriété	On considère une quantité P et un taux d'évolution de $t\%$. ▪ Lorsque P subit n augmentations successives de $t\%$, alors la nouvelle valeur de P est égale à $P\times(1+\frac{t}{100})^n$ ▪ Lorsque P subit n diminutions successives de $t\%$, alors la nouvelle valeur de P est égale à $P\times(1-\frac{t}{100})^n$

Exemple

Une quantité $P = 250$ subit cinq diminutions successives de 2 %.

La nouvelle valeur de P est égale à $250 \times \left(1 - \frac{2}{100}\right)^5 \approx 225{,}98$.

Savoir-Faire

Méthode 3 Calculer des évolutions successives

Un compte bancaire est rémunéré au taux annuel de 3,2 % d'intérêts composés (les intérêts s'ajoutent chaque année au capital). Une somme de 4 000 € est placée sur le compte le 1er janvier 2022.

1. De quelle somme pourra-t-on disposer le 1er janvier 2023 ?
2. De quelle somme pourra-t-on disposer le 1er janvier 2027 ?
3. On utilise la feuille de calcul ci-contre. On cherche l'année 2022 + n où on pourra disposer d'une somme supérieure ou égale à 5 000 € sur le compte. Le nombre 5 000 s'appelle un seuil pour la suite (u_n). Reproduire et compléter la feuille de tableur et déterminer l'année correspondante.

	A	B
1	n	u_n
2	0	4000
3	1	
4	2	
5	3	

Solution commentée

1. La somme disponible sur le compte le 1er janvier 2023 sera la somme du 1er janvier 2022 augmentée de 3,2 % :

$$4\,000 \times \left(1 + \frac{3{,}2}{100}\right) = 4\,128.$$

On pourra disposer d'une somme de 4 128 € le 1er janvier 2023.

2. La somme placée sur le compte rémunéré le 1er janvier 2022 est récupérée le 1er janvier 2027, soit cinq années après son placement initial.
La somme de 4 000 € subit cinq augmentations successives au taux de 3,2 %.
Sa valeur au bout des cinq années sera donc égale à :

$$4\,000 \times \left(1 + \frac{3{,}2}{100}\right)^5 \approx 4\,682{,}29.$$

On pourra disposer au 1er janvier 2027 d'une somme de 4 682,29 €.

3. On complète la feuille de tableur en écrivant dans la cellule B3 la formule =B2*1,032 et on obtient la feuille ci-contre.
L'année où on pourra disposer d'une somme supérieure ou égale à 5 000 € sur le compte correspond à $n = 8$, soit l'année 2022 + 8 = 2030.

	A	B
1	n	u_n
2	0	4000
3	1	4128
4	2	4260,096
5	3	4396,41907
6	4	4537,10448
7	5	4682,29183
8	6	4832,12516
9	7	4986,75317
10	8	5146,32927
11	9	5311,01181

À TON TOUR

Savoir-Faire

Léa vend des habits. Elle décide de faire des soldes pour vider le stock. Pour tout pantalon acheté, elle offre une réduction de son prix de 15 %. Si le client achète un autre article, Léa offre une seconde réduction de 20 % sur le prix du pantalon.
Un pantalon coûte 80 €. Un client achète le pantalon et une cravate à 40 €.
Combien va-t-il payer les deux articles ?

Taux d'évolution moyen

Définition

Soit P une quantité et $T\%$ un taux d'évolution.

- P subit une augmentation de $T\%$ équivaut à P subit n augmentations successives de taux constant égal à

$$\left(1 + \frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Une valeur approchée décimale de ce nombre (le plus souvent écrite sous la forme d'un pourcentage) s'appelle le **taux moyen d'augmentation** au cours des n augmentations successives.

	▪ P subit une diminution de $T\%$ équivaut à P subit n diminutions successives de taux constant égal à $$1-(1-\frac{T}{100})^{\frac{1}{n}}$$ Une valeur approchée décimale de ce nombre (le plus souvent écrite sous la forme d'un pourcentage) s'appelle le **taux moyen de diminution** au cours des n diminutions successives.
Exemple	Le prix d'un article est de 150 €. Quatre ans plus tard, son prix est de 187,50 €. Quelle a été l'augmentation moyenne annuelle de l'article ? L'article a augmenté d'un taux égal à $\frac{187{,}50}{150}-1=0{,}25=25\ \%=T\ \%$. Le taux moyen annuel d'augmentation de l'article est de $\left(1+\frac{25}{100}\right)^{\frac{1}{4}}-1\approx 0{,}0574$. La taux moyen annuel est donc d'environ 5,74 %.
Savoir-Faire	**Méthode 4 Calculer un taux moyen d'évolution** Au début de l'année 2015, on dénombrait 3,1 millions de chômeurs en France. Au début de l'année 2022, on en dénombrait 2,3 millions. (*Source : Insee*) 1. Calculer le taux de diminution du nombre de chômeurs entre début 2015 et début 2022. Arrondir au dixième de pourcent. 2. Calculer le taux de diminution moyen annuel du nombre de chômeurs de début 2015 à début 2022. Arrondir au dixième de pourcent. **Solution commentée** 1. $1-\frac{2{,}3}{3{,}1}\approx 0{,}258$ Le taux de diminution du nombre de chômeurs entre début 2015 et début 2022 est de $0{,}258=25{,}8\ \%=T\ \%$. 2. De 2015 à 2022, il y a 7 diminutions successives du nombre de chômeurs. Le taux moyen annuel de diminution du nombre de chômeurs entre début 2015 et début 2022 est donc $1-\left(1-\frac{25{,}8}{100}\right)^{\frac{1}{7}}\approx 0{,}042$. Le taux moyen annuel de diminution du nombre de chômeurs entre 2015 et 2022 est d'environ 4,2 %.
Savoir-Faire (Suite)	Le chiffre d'affaires annuel de l'entreprise de Johana était de 70 000 € au 31 décembre 2015. Pendant trois ans, son chiffre d'affaires a progressé de 4 % par an puis pendant les quatre années suivantes, il a encore progressé de 4,5 % par an. Calculer le taux annuel moyen d'augmentation du chiffre d'affaires de Johana pendant les sept années. Donner le résultat sous forme d'un pourcentage arrondi au dix-millième.