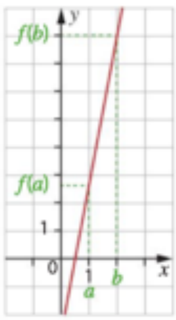
Ce qu'il faut retenir

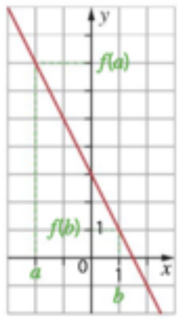
Variation des fonctions affines

$f(x) = mx + p$ pour tout réel x, avec $m = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

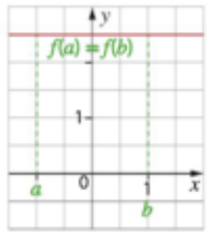
- Si m est positif, alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. Quand les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ augmentent aussi. Pour tous réels a et b, $a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b)$



- Si m est négatif, alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Quand les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ diminuent. Pour tous réels a et b, $a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \geqslant f(b)$



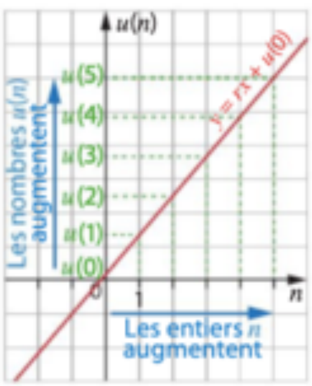
- Si m est nul, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$ (à la fois croissante et décroissante). Quelle que soit la valeur de x, $f(x)$ est égale à un même nombre p.



Variation des suites arithmétiques

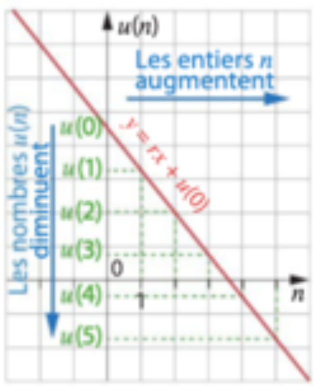
u suite arithmétique de premier terme $u(0) = u_0$ et de raison r.
$u(n+1) = u(n) + r$, noté aussi $u_{n+1} = u_n + r$.

- Si r est positif, alors u est croissante.



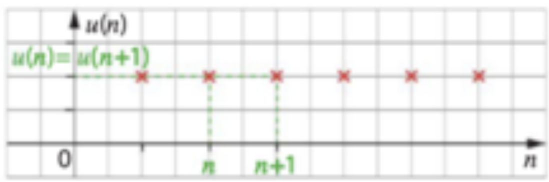
Pour tout entier naturel n, $u(n+1) \geqslant u(n)$, ce qui s'écrit aussi $u_{n+1} \geqslant u_n$.

- Si r est négatif, alors u est décroissante.

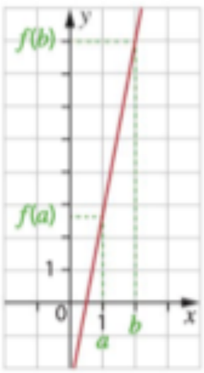
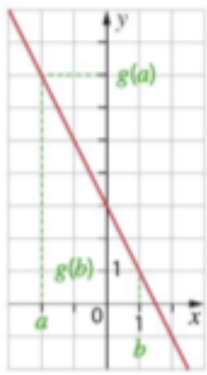
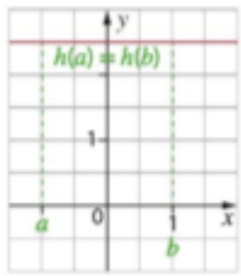


Pour tout entier naturel n, $u(n+1) \leqslant u(n)$, ce qui s'écrit aussi $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- Si r est nul, alors u est constante.



Pour tout entier naturel n, $u(n+1) = u(n)$, ce qui s'écrit aussi $u_{n+1} = u_n$.

Sens de variation des fonctions affines	
Définition	On considère une fonction f définie sur un intervalle I. On dit que : ▪ f est croissante sur I lorsque, pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$ f conserve l'ordre : quand les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ augmentent également. ▪ f est décroissante sur I lorsque, pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$ f inverse l'ordre : quand les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ diminuent.
Propriété	Soit f une fonction affine définie sur par $f(x) = mx + p$. ▪ Si m est positif Quand les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ augmentent également. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. ▪ Si m est négatif Quand les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ diminuent. La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Remarque	Cas particulier : si **m est nul**, quelle que soit la valeur de x, $f(x)$ est égale à un même nombre . La fonction est **constante** sur $\mathbb{R}$ (à la fois croissante et décroissante).
Exemples	• $m > 0$ $f(x) = 5,5\,x - 3$  $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$ La fonction f est **croissante** sur $\mathbb{R}$. • $m < 0$ $g(x) = 3 - 2x$  $a \leq b \Leftrightarrow g(a) \geq g(b)$ La fonction g est **décroissante** sur $\mathbb{R}$. • $m = 0$ $h(x) = 2,5$  La fonction h est **constante** sur $\mathbb{R}$.
Remarque	Lorsqu'on connaît deux réels différents x_1 et x_2 et leurs images par une fonction affine f, le signe du **taux d'accroissement** $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, égal au **coefficient directeur** m, donne le sens de variation de f.
Exemple	Soit la fonction affine g passant par les points $A(3\,;4)$ et $B(-4\,;1)$. Son taux d'accroissement est $m = \frac{4-1}{3-(-4)}$, c'est-à-dire $\frac{3}{7}$ qui est positif. Ainsi la fonction g est croissante.

Savoir-Faire

Méthode 1 Déterminer le sens de variation d'une fonction affine

1 Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x$.
Quel est le sens de variation de la fonction f ? Écrire son tableau de variation.

2 g est une fonction affine et croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $g(2) = -2$.

a. Est-il possible que $g(4) = -3$?

b. Donner une valeur possible de $g(4)$.

c. On sait désormais que $g(4) = 8$. Calculer le coefficient m tel que $g(x) = mx + p$. Pouvait-on prévoir son signe ?

Solution commentée

1 La fonction f est affine, avec $m = -1$. m est négatif, donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
On peut écrire son tableau de variation.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

2 a. Comme g est croissante, et $2 \leqslant 4$, alors $g(2) \leqslant g(4)$. Or $g(2) = -2$, et $-3 < -2$, donc $g(4)$ ne peut pas être égal à -3.

b. On peut prendre pour $g(4)$ toute valeur supérieure à -2. Par exemple $g(4) = 5$.

c. Grâce à $g(2) = -2$ et $g(4) = 8$, on peut calculer le coefficient m.

$m = \dfrac{g(4) - g(2)}{4 - 2}$, donc $m = \dfrac{8 - (-2)}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$. Donc $m = 5$.

Comme g est croissante, on savait que m est un réel positif.

À TON TOUR

Savoir-Faire (Suite)

Soit g la fonction affine telle que $g(2) = 2$ et $g(4) = -2$.

1. Placer dans un repère deux points de la droite $\mathcal{D}$ représentant g.
2. Conjecturer le sens de variation de g.
3. Vérifier que $g(x) = -2x + 6$. Justifier la conjecture de la question 2.
4. Donner les coordonnées du point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec l'axe des ordonnées.

<table>
<tr>
<td>Savoir-Faire (Suite)</td>
<td>

Méthode 2 Déterminer un seuil pour une fonction affine

Un petit bassin peut contenir 2,14 m^3 d'eau.

Le bassin contient initialement 100 litres. On le remplit avec un tuyau qui débite 8,5 litres par minute.

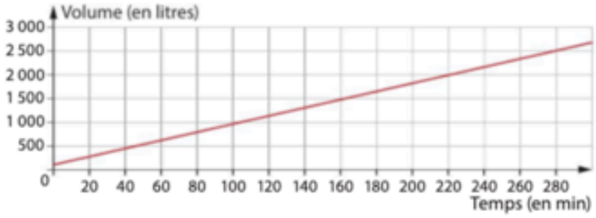
On note t le temps (exprimé en minutes) et $V(t)$ le volume d'eau (exprimé en litres) contenu dans le bassin au bout de t minutes.

1. Exprimer $V(t)$ en fonction de t.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction V.
3. Déterminer le temps t où le bassin va déborder.

Solution commentée

1. En une minute, le tuyau débite 8,5 litres, donc en t minutes, le tuyau débite $8{,}5t$ litres. De plus, initialement, le bassin contient 100 litres.
Au bout de t minutes, le volume $V(t)$ est donc $V(t) = 8{,}5t + 100$.

2.



3. Le bassin a une contenance de 2,14 m^3, soit 2 140 litres. Le bassin déborde lorsque $V(t) > 2\,140$.
$8{,}5t + 100 > 2\,140 \Leftrightarrow 8{,}5t > 2\,040 \Leftrightarrow t > \frac{2\,040}{8{,}5} \Leftrightarrow t > 240$
Le bassin déborde au bout de 240 minutes, soit 4 heures.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Savoir-Faire (Suite)</td>
<td>

À TON TOUR

Un objet mobile se déplace à la vitesse $v(t)$ (exprimée en m/s) où t est le temps (exprimé en s).
On suppose que, pour tout réel $t \geqslant 0$, on a :

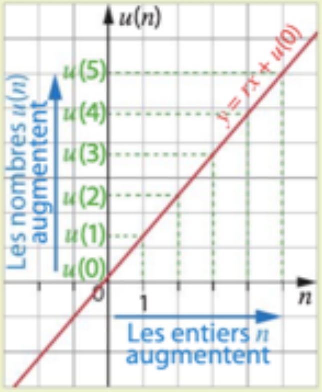
$$v(t) = 2t + 3.$$

Déterminer l'instant t à partir duquel le mobile se déplacera avec une vitesse supérieure ou égale à 24 m/s.

</td>
</tr>
</table>

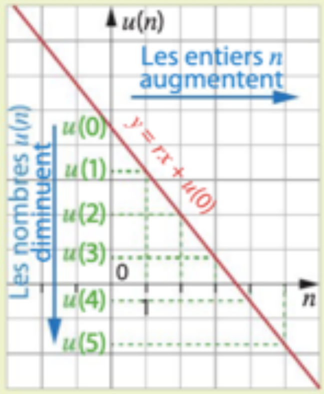
Sens de variation des suites arithmétiques	
Définition	Soit $u: n \to u(n)$ une suite définie pour tout entier naturel n. ▪ Quand les valeurs de n augmentent, si les valeurs de $u(n)$, notées u_n, augmentent aussi, on dit que la suite u est croissante. On a alors $u(n+1) \geq u(n)$ pour tout entier naturel n. ▪ Quand les valeurs de n augmentent, si les valeurs de $u(n)$, notées u_n, diminuent, on dit que la suite u est décroissante. On a alors $u(n+1) \leq u(n)$ pour tout entier naturel n.
Propriété	Soit u une suite arithmétique de premier terme $u(0)$ et de raison r. On a alors $u(n+1) = u(n) + r$, ce qui s'écrit aussi $u_{n+1} = u_n + r$ ▪ Si r est positif, alors u est croissante. ▪ Si r est négatif, alors u est décroissante.
Remarque	Si $r = 0$, alors la suite u est **constante** (à la fois croissante et décroissante).
Interprétation graphique	On considère une suite arithmétique de premier terme $u(0)$ et de raison r. Pour tout entier naturel n, $u(n) = rn + u(0)$, ce qui s'écrit aussi $u_n = rn + u_0$. Les points $(n;\ u(n))$ représentant la suite appartiennent à la droite d'équation $y = rx + u(0)$. La suite u et la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = rx + u(0)$ ont le même sens de variation.

- Si $r \geqslant 0$:



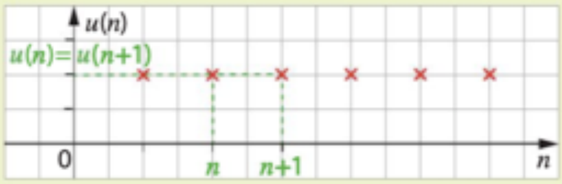
La suite u est croissante.
Pour tout entier naturel n, $u(n+1) \geqslant u(n)$,
ce qui s'écrit aussi $u_{n+1} \geqslant u_n$.

- Si $r \leqslant 0$:



La suite u est décroissante.
Pour tout entier naturel n, $u(n+1) \leqslant u(n)$,
ce qui s'écrit aussi $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Cas particulier** : si $r = 0$, la suite est constante.



Savoir-Faire

Méthode 3 Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique

Soient les suites arithmétiques $(u(n))$ et $(v(n))$ telles que $u(n) = 3n - 2$ et $v(n) = -2n + 5$.

1. Quel est le sens de variation des suites $(u(n))$ et $(v(n))$?
2. On note $(w(n))$ la suite arithmétique définie pour tout entier naturel n par $w(n) = u(n) + v(n)$.
   a. Donner la forme explicite de la suite w.
   b. En déduire le sens de variation de la suite w.

Solution commentée

1. La raison de la suite arithmétique $(u(n))$ est 3.
3 est positif, donc la suite arithmétique $(u(n))$ est croissante.
La raison de la suite arithmétique $(v(n))$ est -2.
-2 est négatif donc la suite arithmétique $(v(n))$ est décroissante.

2. a. $w(n) = 3n - 2 + (-2n + 5)$
$= 3n - 2 - 2n + 5$
$= n + 3$
b. La suite $(w(n))$ est une suite arithmétique de raison 1, qui est positif, elle est donc croissante.

Savoir-Faire (Suite)

À TON TOUR

Répondre à chaque affirmation par Vrai ou Faux en justifiant la réponse.
On considère la suite $(t(n))$ définie par la relation de récurrence : $t(n+1) = t(n) + 11$ et $t(0) = -15$.

a. La raison de la suite $(t(n))$ est -15.
b. La raison de de la suite $(t(n))$ est négative.
c. Les termes de la suite $(t(n))$ sont tous négatifs.
d. La suite est croissante.

Savoir-Faire (Suite)

Méthode 4 Déterminer un seuil pour une suite arithmétique

Une banque propose à Jennifer de placer, à partir du 1er janvier 2023, une somme de 3 000 € sur un compte rémunéré au taux simple annuel de 5 %.

Le taux simple annuel signifie que chaque 1er janvier des années suivant 2023, la somme présente sur le compte augmentera de 5 % de la somme initiale.

On note n le nombre d'années après 2023 et $u(n)$ la somme d'argent présente sur le compte le 1er janvier après n années de placement. On a alors $u(0) = 3\ 000$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u(n+1) = u(n) + 150$.
2. Déterminer le nombre d'années que doit attendre Jennifer pour disposer d'une somme au moins égale à 4 500 €.

Solution commentée

1. Au 1er janvier après n années de placement, la somme d'argent est égale à $u(n)$.
Au 1er janvier après $n+1$ années de placement, la somme d'argent est égale à $u(n+1)$.
Cette somme d'argent est égale à la somme d'argent de l'année précédente à laquelle on ajoute 5 % de la somme initiale.
Or 5 % de la somme initiale vaut $\frac{5}{100} \times 3\ 000 = 150$.
On a donc $u(n+1) = u(n) + 150$.

2. La suite $(u(n))$ est une suite arithmétique de raison 150 et de premier terme $u(0) = 3\ 000$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u(n) = 3\ 000 + 150n$.
On cherche le plus petit entier n tel que $u(n) \geqslant 4500$.
$$u(n) \geqslant 4\ 500 \Leftrightarrow 3\ 000 + 150n \geqslant 4\ 500$$
$$\Leftrightarrow 150n \geqslant 1\ 500$$
$$\Leftrightarrow n \geqslant 10$$
Jennifer devra attendre 10 ans pour disposer d'une somme supérieure ou égale à 4 500 €.

Savoir-Faire (Suite)

À TON TOUR

En 2023, la population d'une espèce d'oiseaux d'un parc naturel est égale à 4 500 individus. La population augmente chaque année de 163 oiseaux.
On note n le nombre d'années écoulées depuis 2023.
Déterminer la première année où le nombre d'oiseaux du parc naturel sera supérieur ou égal à 6 000.