Ce qu'il faut retenir

Relation de récurrence pour une suite géométrique

u_0 et q sont deux réels donnés strictement positifs.

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

q s'appelle la raison de la suite géométrique (u_n).

Fonctions exponentielles de base a

Soit a un réel strictement positif.

La fonction exponentielle de base a est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = a^x$$

f est le prolongement à tout nombre réel x de la suite géométrique (u_n), de premier terme $u_0 = 1$ et définie pour tout entier naturel n par $u_n = a^n$.

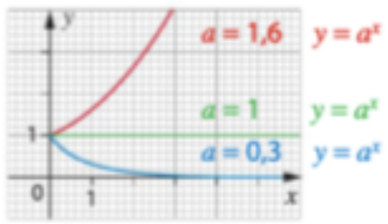
Formule explicite d'une suite géométrique

Si on connaît u_0, alors $u_n = u_0 \times q^n$.

Si on connaît u_r, alors, pour tout $n \geqslant r$, on a :

$$u_n = u_r \times q^{n-r}.$$

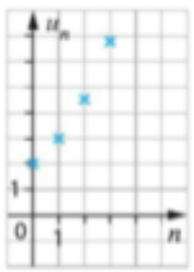
Représentation graphique des fonctions exponentielles



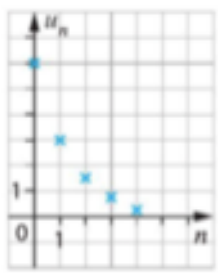
Représentation d'une suite géométrique

Une suite géométrique (u_n) se représente par un nuage de points de coordonnées $(n\,;u_n)$.

$u_0 = 2$ et $q = 1{,}5$



$u_0 = 6$ et $q = 0{,}5$



Propriétés algébriques des fonctions exponentielles

- Pour tout réel $a > 0$: $a^0 = 1$
- Si $x \geqslant y \geqslant 0$:

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

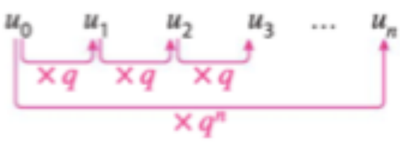
$$(a^x)^y = a^{xy}$$

Racine n-ième d'un réel $a > 0$

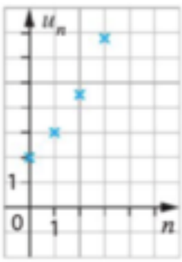
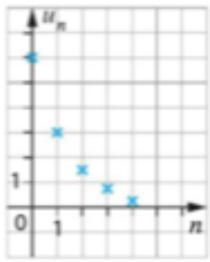
L'équation $b^n = a$, d'inconnue b, admet une unique solution positive : $b = a^{\frac{1}{n}}$.

$a^{\frac{1}{n}}$ s'appelle la racine n-ième de a.

On note aussi $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

<table>
<tr><th colspan="3">Phénomènes discrets: Suites géométriques</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="2">Soit q un nombre réel strictement positif. Une suite (U_n) est une suite géométrique si et seulement si, pour tout entier naturel n :
$$U_{n+1} = q \times U_n$$
q est appelée la raison de la suite géométrique (U_n).
$U_{n+1} = q \times U_n$ s'appelle la relation de récurrence de la suite géométrique.</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="2">On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2{,}5u_n$.
La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme 3 et de raison 2,5.
On a alors $u_1 = 2{,}5 \times u_0 = 2{,}5 \times 3 = 7{,}5$. On a $u_2 = 2{,}5 \times u_1 = 2{,}5 \times 7{,}5 = 18{,}75$.</td></tr>
<tr><td>Propriété</td><td colspan="2">(U_n) est la suite géométrique de premier terme $U_0 > 0$ et de raison $q > 0$ si et seulement si, pour tout entier naturel n, on a :
$$U_n = U_0 \times q^n$$
$U_n = U_0 \times q^n$ s'appelle la formule explicite de la suite géométrique.</td></tr>
<tr><td>Remarque</td><td colspan="2">On passe d'un terme au suivant en multipliant par la raison q : 
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Propriété</td><td colspan="2">Soit (U_n) une suite géométrique de raison q</td></tr>
<tr><td>Si le premier terme de la suite est U_0
Alors pour tout $n \geq 0$
$$U_n = U_0 \times q^n$$</td><td>Si le premier terme de la suite est U_1
Alors pour tout $n \geq 0$
$$U_n = U_1 \times q^{n-1}$$</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="2">• On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 3{,}2$.
Pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0q^n = 5 \times 3{,}2^n$.
• On considère la suite géométrique (u_n) telle que $u_6 = 13$ et de raison $q = 5{,}3$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 6$, on a $u_n = u_6q^{n-6} = 13 \times 5{,}3^{n-6}$.</td></tr>
<tr><td>Savoir-Faire</td><td colspan="2">Méthode 1 Utiliser la relation de récurrence
1 On considère la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = 2$.
a. Écrire la relation de récurrence de la suite (u_n).
b. Calculer u_3.
2 On considère la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 0{,}5$.
a. Écrire la relation de récurrence de la suite (v_n).
b. Calculer v_3.
Solution commentée
1 a. La relation de récurrence de la suite (u_n) est $u_{n+1} = 2u_n$.
b. Pour calculer u_3, on doit calculer les termes u_1 et u_2 :
$u_1 = 2u_0 = 8$; $u_2 = 2u_1 = 16$; $u_3 = 2u_2 = 32$.
2 a. La relation de récurrence de la suite (v_n) est $v_{n+1} = 0{,}5v_n$.
b. Pour calculer v_3, on doit calculer les termes v_1 et v_2 :
$v_1 = 0{,}5v_0 = 1$; $v_2 = 0{,}5v_1 = 0{,}5$; $v_3 = 0{,}5v_2 = 0{,}25$.
A TON TOUR</td></tr>
</table>

Savoir-Faire (Suite)	On considère la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 3$. 1. Écrire la relation de récurrence de la suite (u_n). 2. Calculer u_1 et u_2.
Savoir-Faire (Suite)	**Méthode 2 Utiliser la formule explicite** 1 On considère la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2{,}5$ et de raison $q = 3{,}2$. a. Écrire la formule explicite de la suite (u_n). b. Calculer une valeur approchée arrondie au centième de u_8. 2 On considère la suite géométrique telle que $v_4 = 6$ et de raison $q = 0{,}1$. a. Écrire la formule explicite de la suite (v_n). b. Calculer v_7. **Solution commentée** 1 a. La formule explicite de la suite (u_n) est $u_n = u_0 q^n = 2{,}5 \times 3{,}2^n$. b. On calcule u_8 avec la calculatrice : $u_8 = 2{,}5 \times 3{,}2^8 \approx 27\ 487{,}79$. 2 a. La formule explicite de la suite (v_n) est $v_n = v_4 q^{n-4} = 6 \times 0{,}1^{n-4}$. b. $v_7 = 6 \times 0{,}1^{7-4} = 6 \times 0{,}1^3 = 0{,}006$. À TON TOUR
Savoir-Faire (Suite)	On considère la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 4$. 1. Écrire la formule explicite de la suite (u_n). 2. Calculer u_3 et u_7.

Phénomènes discrets: Représentation graphique	
Définition	Une suite géométrique (U_n) se représente par un nuage de points de coordonnées $(n\,;U(n))$. Une suite géométrique a une croissance appelée **croissance exponentielle**.
Exemple	• $u_0 = 2$ et $q = 1{,}5$  • $u_0 = 6$ et $q = 0{,}5$ 

Savoir-Faire	see below

Savoir-Faire

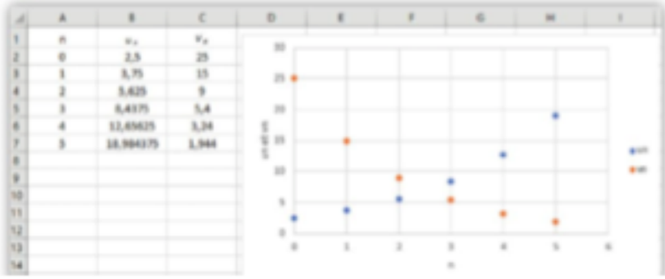
Méthode 3 Représenter graphiquement une suite géométrique avec un tableur

On considère les suites géométriques suivantes.

- (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2{,}5$ et de raison $q = 1{,}5$.
- (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 25$ et de raison $q = 0{,}6$.

Représenter, à l'aide d'un tableur et sur un même graphique, ces deux suites géométriques.

Solution commentée



n	u_n	v_n
0	2,5	25
1	3,75	15
2	5,625	9
3	8,4375	5,4
4	12,65625	3,24
5	18,984375	1,944

À TON TOUR

Savoir-Faire (Suite)

Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

Phénomènes continus: Fonction $x \to a^x$

Définition

Soit a un réel strictement positif.
La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = a^x$ est appelée **fonction exponentielle de base a**.
Cette fonction est le prolongement à tout nombre réel x positif de la suite géométrique (U_n), de premier terme $U_o = 1$ et de raison a définie pour tout entier naturel n par $U_n = a^n$.

Remarque

- Pour tout réel $a > 0$ et tout réel $x \geqslant 0$, on a $a^x > 0$.
- Les valeurs de a^x se calculent en général avec la calculatrice.

Exemple

- La fonction f définie pour tout réel x positif par $f(x) = 2{,}7^x$ est la fonction exponentielle de base 2,7.
$f(0) = 2{,}7^0 = 1$; $f(1{,}2) = 2{,}7^{1{,}2} \approx 3{,}29$.
- La fonction g définie pour tout réel x positif par $g(x) = 0{,}4^x$ est la fonction exponentielle de base 0,4.
$g(0) = 0{,}4^0 = 1$; $g(3{,}5) = 0{,}4^{3{,}5} \approx 0{,}04$.

Savoir-Faire

Méthode 4 Utiliser une fonction exponentielle

1. On considère la fonction f définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par $f(x) = 1{,}3^x$.
Compléter le tableau de valeurs suivant. Arrondir les résultats au centième.

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$					

2. On considère la fonction g définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par $g(x) = -2 \times 0{,}7^x$.
Compléter le tableau de valeurs suivant. Arrondir les résultats au centième.

x	0	0,2	0,4	0,8	1
$g(x)$					

Solution commentée

1.

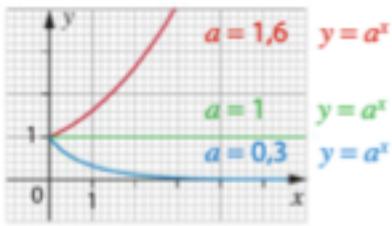
x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	1	1,14	1,3	1,48	1,69

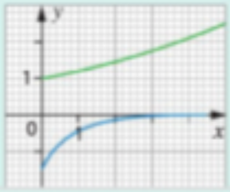
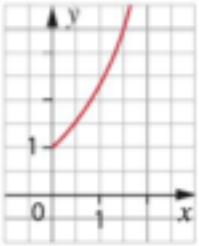
2.

x	0	0,2	0,4	0,8	1
$g(x)$	−2	−1,86	−1,73	−1,50	−1,4

Savoir-Faire (Suite)	**À TON TOUR** On considère la fonction f définie pour tout réel x positif par $f(x) = 9^x$. 1. Que valent $f(0)$ et $f(1)$? 2. Donner une valeur approchée, arrondie au centième, des réels suivants : $f(0,1)$; $f(0,8)$; $f(1,1)$; $f(1,5)$. 3. Calculer $f(0,5)$. Comparer avec $\sqrt{9}$.

Phénomènes continus: Propriétés algébriques	
Propriétés	Pour tout réel a strictement positif, $a^0 = 1$. Pour tous réels x et y avec $x \geq y \geq 0$, on a : $a^x \times a^y = a^{x+y}$ $\qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\qquad (a^x)^y = a^{xy}$
Savoir-Faire (Suite)	**Méthode 5 Utiliser les propriétés algébriques** **1** Dans chaque cas, écrire le résultat sous la forme $4,5^x$, où x est un nombre réel positif. a. $4,5^{2,4} \times 4,5^{3,5}$ b. $\frac{4,5^{5,2}}{4,5^{3,1}}$ c. $\frac{4,5^{5,7} \times 4,5^3}{4,5^{2,1}}$ **2** Dans chaque cas, écrire le résultat sous la forme $2,1^x$, où x est un nombre réel. a. $(2,1^{3,2})^{1,2}$ b. $\left(\frac{2,1^{5,3}}{2,1^2}\right)^{2,4}$ c. $(2,1^3 \times 2,1^{4,5})^{1,5}$ **Solution commentée** **1** a. $4,5^{2,4} \times 4,5^{3,5} = 4,5^{2,4+3,5} = 4,5^{5,9}$ b. $\frac{4,5^{5,2}}{4,5^{3,1}} = 4,5^{5,2-3,1} = 4,5^{2,1}$ c. $\frac{4,5^{5,7} \times 4,5^3}{4,5^{2,1}} = \frac{4,5^{8,7}}{4,5^{2,1}} = 4,5^{6,6}$ **2** a. $(2,1^{3,2})^{1,2} = 2,1^{3,2\times1,2} = 2,1^{3,84}$ b. $\left(\frac{2,1^{5,3}}{2,1^2}\right)^{2,4} = (2,1^{3,3})^{2,4} = 2,1^{7,92}$ c. $(2,1^3 \times 2,1^{4,5})^{1,5} = (2,1^{7,5})^{1,5} = 2,1^{7,5\times1,5} = 2,1^{11,25}$ **À TON TOUR**
Savoir-Faire (Suite)	Dans chaque cas, écrire le résultat sous la forme $1,5^x$, où x est un nombre réel positif puis donner une valeur approchée au centième du résultat ou le résultat exact si cela est possible. a. $1,5^2 \times 1,5^{2,5}$ b. $1,5^{3,1} \times 1,5^{1,9}$ c. $\frac{1,5^{5,3}}{1,5^{2,3}}$ d. $(1,5^{3,1})^2$

Phénomènes continus: Représentation graphique		
Propriétés	Soit a un réel strictement positif. Avec un logiciel de géométrie dynamique, on peut tracer la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel $x \geq 0$ par $f(x) = a^x$.	
Exemples	$f(x) = 1,6^x$ $g(x) = 1^x$ $h(x) = 0,3^x$	

Savoir-Faire	**Méthode 6** Utiliser la courbe représentative d'une fonction exponentielle La courbe représentative de deux fonctions exponentielles f et g, définies pour tout réel $x \geqslant 0$ par $f(x) = 1{,}2^x$ et $g(x) = -1{,}5 \times 0{,}3^x$ ont été tracées ci-contre. Associer chaque fonction à sa courbe représentative.  **Solution commentée** On a $f(0) = 1{,}2^0 = 1$ et $g(0) = -1{,}5 \times 0{,}3^0 = -1{,}5$. La courbe verte est celle de la fonction f et la courbe bleue est celle de la fonction g. À TON TOUR
Savoir-Faire (Suite)	On considère la fonction exponentielle de base $a = 2{,}3$. **1.** Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x. **2.** On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.  Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes sans justifier la réponse. On pourra utiliser le graphique ou l'expression de $f(x)$. **a.** $f(0{,}5) \geqslant 1$ **b.** $f(1{,}5) \leqslant 3$ **c.** $f(1) = 2{,}3$ **d.** $f(4) > 12$

Phénomènes continus: Racine n-ième d'un nombre réel positif	
Propriétés	Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel non nul. L'équation $b^n = a$, d'inconnue b, admet une unique solution positive : $b = a^{\frac{1}{n}}$ $a^{\frac{1}{n}}$ s'appelle **la racine n-ième de a.** On la note aussi $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.
Savoir-Faire	**Méthode 7** Calculer la racine n-ième d'un nombre réel positif Calculer une valeur approchée au centième des nombres suivants. **a.** $3^{\frac{1}{4}}$ **b.** $5{,}25^{\frac{1}{5}}$ **c.** $64^{\frac{1}{3}}$ **Solution commentée** À l'aide de la calculatrice, on trouve : **a.** $3^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}32$ **b.** $5{,}25^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}39$ **c.** $64^{\frac{1}{3}} = 4$ À TON TOUR

<table>
<tr>
<td>Savoir-Faire (Suite)</td>
<td>
1. Quel est le calcul effectué avec la suite de commandes ci-dessous saisies sur une calculatrice ? Quel est le résultat obtenu ?


2. Quel est le calcul effectué avec l'écriture ci-dessous saisie sur une calculatrice ?


Quel est le résultat obtenu ?
</td>
</tr>
</table>