Ce qu'il faut retenir

Définition d'une fonction affine

Une **fonction affine** f est une fonction définie pour tout nombre réel x par la relation :

$f(x) = mx + p$, où m et p sont des réels fixés.

- Si $p = 0$, alors $f(x) = mx$ et f est une **fonction linéaire.**
- Si $m = 0$, alors $f(x) = p$ et f est une **fonction constante.**

Définition et notations d'une suite

Une suite est une fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$n \mapsto u(n)$

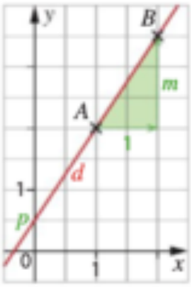
Le nombre réel $u(n)$ est aussi noté u_n ; c'est le terme de rang n, aussi appelé **terme général** de la suite.

Terme	$u(0) = u_0$	$u(1) = u_1$	$u(2) = u_2$	…	$u(n) = u_n$
Son rang	0	1	2	…	n
Sa position	1[er] terme	2[e] terme	3[e] terme	…	$(n+1)^e$ terme

La suite u est aussi notée « suite (u_n) » ou « suite $(u(n))$ ».

Représentation graphique d'une fonction affine

La représentation graphique d'une fonction affine f, définie pour tout réel x par $f(x) = mx + p$ est une droite d.



- m est le coefficient directeur (appelé aussi « pente ») de la droite d.

$$m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B},$$

avec $A(x_A\,;y_A) \in d$ et $B(x_B\,;\,y_B) \in d$.

Lorsque $x_B - x_A = 1$, alors $m = y_B - y_A$.

- p est l'ordonnée à l'origine.
p est l'image de 0 par la fonction f, c'est donc l'ordonnée du point d'intersection de la droite représentative de f avec l'axe des ordonnées.
- Si la fonction est linéaire, elle est représentée par une droite passant par l'origine du repère.
- Si la fonction est constante, elle est représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Définitions d'une suite arithmétique

- **Formule de récurrence**

Soit $u(0)$ un nombre réel. Une suite $(u(n))$ est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, on a $u(n+1) = u(n) + r$.
$u(0)$ est le premier terme et r s'appelle **la raison** de la suite arithmétique.

$$u(0) \xrightarrow{+r} u(1) \xrightarrow{+r} u(2) \xrightarrow{+r} u(3) \quad \dots \quad u(n-1) \xrightarrow{+r} u(n) \xrightarrow{+r} u(n+1) \quad \dots$$

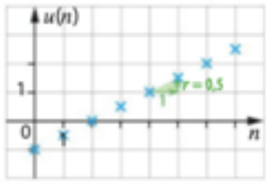
- **Formule explicite**

$(u(n))$ est une suite arithmétique de 1[er] terme $u(0)$ et de raison r si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) + nr$.

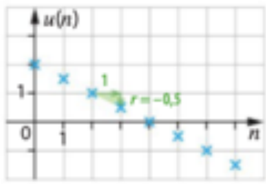
Représentation graphique d'une suite arithmétique

La représentation graphique d'une suite arithmétique est constituée de points alignés.

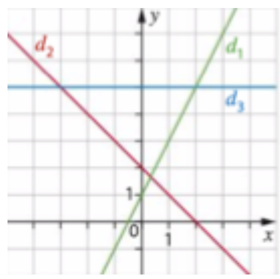
Pour $u(0) = -1$ et $r = 0{,}5$

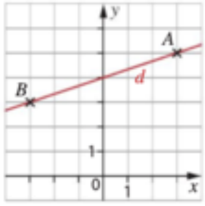


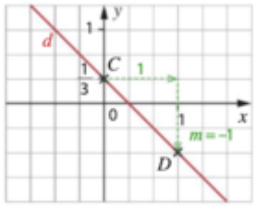
Pour $u(0) = 2$ et $r = -0{,}5$



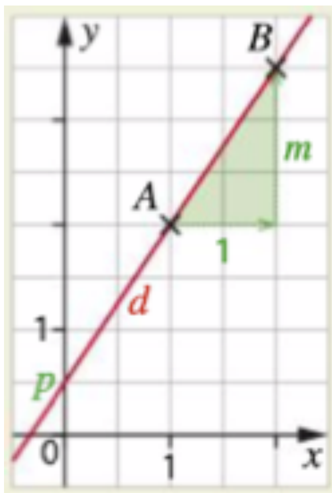
Phénomènes continus : fonctions affines	
Définition	Une fonction affine f est une fonction définie pour tout nombre réel x par la relation $f\ (x) = mx + p$, où m et p sont des réels fixés. On dit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels. Si $p = 0$, alors la relation devient $f\ (x) = mx$. La fonction f est une fonction linéaire. Si $m = 0$, alors la relation devient $f\ (x) = p$. La fonction f est une fonction constante.
Exemples	• La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 5$ est une fonction affine, avec $m = 1$ et $p = -5$. • La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x$ est une fonction linéaire (donc affine), avec $m = -2$ et $p = 0$. • La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 8$ est une fonction constante (donc affine), avec $m = 0$ et $p = 8$.
Savoir-Faire	**Méthode 1 Montrer qu'une fonction est affine** Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Si elles le sont, déterminer m et p. 1 $g : x \mapsto 2x - 3$ 2 $h : x \mapsto \frac{1}{x} - 3$ 3 $f : x \mapsto \frac{3 - 5x}{2}$ **Solution commentée** 1 $g(x)$ est de la forme $g(x) = mx + p$, avec $m = 2$ et $p = -3$; la fonction g est donc affine. 2 $h(x)$ ne peut pas s'écrire sous la forme $mx + p$, donc h n'est pas une fonction affine. 3 On peut écrire $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}x$, $f(x)$ s'écrit donc sous la forme $mx + p$, avec $m = -\frac{5}{2}$ et $p = \frac{3}{2}$; la fonction f est donc affine. À TON TOUR
Savoir-Faire (Suite)	Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Si oui, déterminer m et p. $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x - 3$ $g : x \mapsto \sqrt{x} - 3$ $h : x \mapsto \frac{2 - 3x}{3}$ $t : x \mapsto \frac{2}{x - 1}$ $s : x \mapsto 2\sqrt{2}$ $r : x \mapsto x + 1$

Phénomènes continus : Représentation graphique		
Propriété	La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.	
Remarque	• Lorsque la fonction est **linéaire**, elle est représentée par une droite passant par l'**origine du repère**. • Lorsque la fonction est **constante**, elle est représentée par une **droite parallèle à l'axe des abscisses.**	
Exemple	On considère les trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -x + 2$ et $h(x) = 5$. Sur le graphique ci-contre, la droite d_1 représente la fonction f, la droite d_2 la fonction g et la droite d_3 la fonction h.	

<table>
<tr><td>Savoir-Faire</td><td>
Méthode 2 Représenter graphiquement une fonction affine
1 Représenter graphiquement la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$ en déterminant l'image de deux nombres.
2 Construire la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x + \frac{1}{3}$ en utilisant son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.
Solution commentée
1 La fonction f est une fonction affine, donc sa représentation graphique est une droite d. Pour tracer cette droite, il suffit de trouver deux points appartenant à d.
$f(3) = \frac{1}{3} \times 3 + 4 = 5$; donc le point $A(3\,;5)$ appartient à d.
$f(-3) = \frac{1}{3} \times (-3) + 4 = 3$; donc le point $B(-3\,;3)$ appartient à d.


2 La fonction g est une fonction affine, donc sa représentation graphique est une droite d. Son ordonnée à l'origine est égale à $\frac{1}{3}$ donc le point $C\left(0\,;\frac{1}{3}\right)$ appartient à d.
Son coefficient directeur m est égal à -1.
Le point $D\left(0+1\,;\frac{1}{3}+m\right)$ appartient donc à d. On le construit comme sur la figure ci-contre.


</td></tr>
<tr><td>Savoir-Faire (Suite)</td><td>
À TON TOUR
On considère la fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -4x + 0{,}5$.
1. Représenter la fonction affine f dans un repère orthonormé. Placer les points $B(-1\,;4{,}5)$ et $C(3\,;-11{,}5)$.
2. Trouver un point Z aligné avec B et C et tel que $y_Z = -199{,}5$.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Phénomènes continus : Coefficient directeur</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td>Si $f(x) = mx + p$, alors m est le coefficient directeur général (appelé aussi « pente ») de la droite représentative de f, et p est l'ordonnée à l'origine.</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Propriété</td><td>Soient f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ et d la droite qui la représente dans un repère.
▪ Soient A $(x_A\,;y_A)$ et B $(x_B\,;y_B)$ deux points quelconques de d.
$$m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$
Lorsque $x_B - x_A = 1$, alors $y_B - y_A = m$
▪ p est l'image de 0 par la fonction f, c'est donc l'ordonnée du point d'intersection de la droite représentative de f avec l'axe des ordonnées.</td></tr>
</table>

Savoir-Faire	**Méthode 3** **Déterminer l'expression d'une fonction affine** f est une fonction affine telle que $f(1) = 4$ et $f(-3) = -8$. Déterminer l'expression de $f(x)$. **Solution commentée** $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = mx + p$. On calcule $m = \frac{f(1) - f(-3)}{1-(-3)}$, ce qui donne $m = \frac{4-(-8)}{1+3}$ donc $m = 3$. Pour calculer p, on remplace m par sa valeur dans l'égalité $f(1) = 4$ ou dans l'égalité $f(-3) = -8$. $f(1) = 3 \times 1 + p$, donc $3 + p = 4$ et donc $p = 1$. Ainsi $f(x) = 3x + 1$.
Savoir-Faire (Suite)	**À TON TOUR** Déterminer l'expression de la fonction affine représentée par la droite passant par les points $A(2\,;6)$ et $B(8\,;12)$.

Phénomènes Discrets : Suite numérique	
Définition	On appelle suite numérique toute fonction $u: n \mapsto u(n)$ définie pour n entier naturel. Les images $u(n)$ sont les termes de la suite et peuvent aussi être notées u_n (« u indice n »). Les entiers naturels n sont appelés les rangs (ou les indices) des termes. Comme ils sont entiers, on dit qu'une suite modélise des phénomènes discrets. La suite u se note également $\big(u(n)\big)$ ou (u_n).

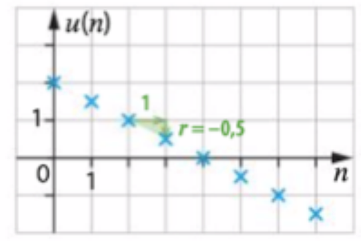
Phénomènes Discrets : Suite arithmétique	
Définition	Soit u une suite numérique. On dit que u est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n, on a : $u(n+1) = u(n) + r$ $u_{n+1} = u_n + r$ Cette relation est appelée **relation de récurrence** de la suite arithmétique et le nombre r est appelé raison de la suite arithmétique.
Exemple	Soit la suite u définie par $u(0) = 17$ et $u(n+1) = u(n) - 3$ pour tout entier naturel n. u est une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme 17. Le terme de rang 1 est $u(1) = 17 - 3 = 14$, c'est le deuxième terme de la suite.
Remarque	On passe toujours d'un terme à son suivant en ajoutant la raison r : $u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \;\dots\; u_n$ $+nr$
Propriété	$(u(n))$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u(0)$ si et seulement si, pour tout entier naturel n, on a : $u(n) = u(0) + nr$ $u_n = u_0 + nr$ Cette relation est appelée **forme explicite** de la suite arithmétique. On dit alors que l'on a exprimé le terme général $u(n)$ en fonction de n.

<table>
<tr><td>Remarque</td><td>

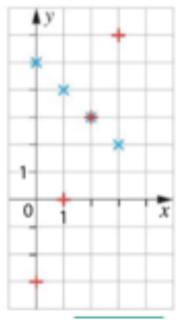
La forme explicite permet de calculer directement la valeur de n'importe quel terme
Soit p un entier naturel. Pour tout entier $n \geqslant p$, $u(n) = u(p) + (n - p)r$.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Phénomènes Discrets : Représentation graphique</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td>
Pour une suite arithmétique de premier terme $u(0)$ et de raison r, l'expression $u(n) = u(0) + nr$ peut s'écrire $u(n) = f(n)$, où f est la fonction affine définie pour tout réel x par $f(x) = rx + u(0)$.

La représentation graphique d'une suite arithmétique est constituée de points alignés. L'écart horizontal entre deux points consécutifs est 1 et l'écart vertical est la raison r.
</td><td>
Pour $u(0) = 2$ et $r = -0{,}5$


</td></tr>
<tr><td>Savoir-Faire</td><td colspan="2">
Méthode 4 Utiliser la relation de récurrence d'une suite
Soit $(u(n))$ la suite arithmétique définie par $u(0) = -7$, et pour tout entier naturel n, par :
$u(n + 1) = u(n) + 4$.
1 Quelle est la valeur de la raison de cette suite ? De son premier terme ?
2 Calculer les termes de rang 1, de rang 2 puis le 5^e terme de la suite.
Solution commentée
1 Le premier terme est $u(0) = -7$ et la raison est $r = 4$.
2 $u(1)$ est le terme de rang 1. On a $u(1) = u(0) + 4 = -7 + 4 = -3$.
$u(2)$ est le terme de rang 2. On a $u(2) = u(1) + 4 = -3 + 4 = 1$.
$u(4)$ est le 5^e terme de la suite. $u(4) = u(3) + 4$. Or $u(3) = u(2) + 4 = 1 + 4 = 5$.
Donc $u(4) = 5 + 4 = 9$.
À TON TOUR
</td></tr>
<tr><td>Savoir-Faire (Suite)</td><td colspan="2">
112,5 et 106,1 sont deux termes consécutifs d'une suite arithmétique (u_n).
1. Donner la raison de cette suite, la valeur du terme qui précède 112,5 et la valeur du terme qui suit 106,1.
2. On admet que $u_1 = 112{,}5$.
Donner alors u_0, u_2, u_3 et u_4.
</td></tr>
<tr><td>Savoir-Faire (Suite)</td><td colspan="2">
Méthode 5 Utiliser la forme explicite d'une suite
1 Soit la suite $(u(n))$ définie, pour tout entier naturel n, par $u(n) = 10n - 100$.
Calculer $u(1)$, le terme de rang 3, puis le 5^e terme.
2 Soit la suite $(v(n))$ définie pour tout entier naturel n, par $v(n) = -2n - 3$.
Calculer $v(11)$, le terme de rang 15, puis le 20^e terme.
Solution commentée
1 Soit la suite $(u(n))$ définie pour tout entier naturel n, par $u(n) = 10n - 100$.
$u(1) = 10 \times 1 - 100$, d'où $u(1) = -90$.
Le terme de rang 3 est $u(3) = 10 \times 3 - 100$, soit $u(3) = -70$.
Le 5^e terme est $u(4) = 10 \times 4 - 100$, d'où $u(4) = -60$.
2 Soit la suite $(v(n))$ définie pour tout entier naturel n, par $v(n) = -2n - 3$.
$v(11) = -2 \times 11 - 3$, d'où $v(11) = -25$.
Le terme de rang 15 est $v(15) = -2 \times 15 - 3$ soit $v(15) = -33$.
Le 20^e terme est $v(19)$, soit $v(19) = -2 \times 19 - 3 = -41$.
À TON TOUR
</td></tr>
</table>

Savoir-Faire (Suite)	Répondre à chaque affirmation par Vrai ou Faux en justifiant. On considère la suite (j_n) définie par la formule explicite $j_n = -26 + 11n$. **a.** La suite (j_n) est arithmétique. **b.** La raison de cette suite est négative. **c.** $j_0 = -4$ **d.** Tous les termes de la suite sont positifs à partir du rang 3.
Savoir-Faire (Suite)	**Méthode 6 Représenter graphiquement une suite arithmétique** On considère les suites arithmétiques a et b définies pour tout entier n par $a(n) = -3 + 3n$ et $b(n) = 5 - n$. **1** Représenter sur le même graphique les quatre premiers termes de ces deux suites. **2** Associer à chaque suite l'une des équations de droite suivantes : $y = -x + 5$ et $y = 3x - 3$. **3** Lire graphiquement la valeur de n pour laquelle on a $a(n) = b(n)$. **Solution commentée** **1** On place les points rouges pour la suite a et les points bleus pour la suite b. **2** Les points de la représentation graphique de la suite a sont situés sur la droite d'équation $y = 3x - 3$ et ceux de la représentation graphique de la suite b sont situés sur la droite d'équation $y = -x + 5$ **3** Graphiquement on voit que les points de coordonnées $(2\,;a(2))$ et $(2\,;b(2))$ sont confondus. Donc $a(n) = b(n)$ pour $n = 2$. 
Savoir-Faire (Suite)	On considère les suites arithmétiques u et v, définies pour tout entier naturel n, par : $u(n) = -1 + n$ et $v(n+1) = -1 + v(n)$ avec $v(0) = -1$. Placer sur le même graphique les quatre premiers termes des suites u et v.