Phénomène aléatoire

Ce qu'il faut retenir

Fréquences conditionnelles et marginales

Un tableau croisé d'effectifs permet de calculer des fréquences conditionnelles. N est l'effectif total.

	A	$\bar{A}$	Total
B	$\text{card}(A \cap B)$	$\text{card}(\bar{A} \cap B)$	$\text{card}(B)$
$\bar{B}$	$\text{card}(A \cap \bar{B})$	$\text{card}(\bar{A} \cap \bar{B})$	$\text{card}(\bar{B})$
Total	$\text{card}(A)$	$\text{card}(\bar{A})$	N

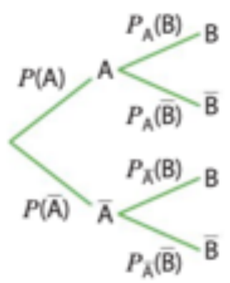
- $f_B(A) = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$ est la fréquence conditionnelle de A parmi B, c'est une **fréquence conditionnelle en ligne.**
  $f_A(B) = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$ est la fréquence conditionnelle de B parmi A, c'est une **fréquence conditionnelle en colonne.**

- Les marges sont les totaux en ligne ou en colonne.
  La fréquence marginale de B est $\dfrac{\text{card}(B)}{N}$.

Probabilités conditionnelles et arbre de probabilités

Soient A et B deux évènements d'un même univers avec $B \neq \varnothing$, donc $P(B) \neq 0$.
La probabilité de A sachant que B est réalisé est $P_B(A) = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Arbre de probabilités



Évènements	Probabilités
$A \cap B$	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
$A \cap \bar{B}$	$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B})$
$\bar{A} \cap B$	$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$
$\bar{A} \cap \bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B})$

À chaque nœud, la somme des probabilités est égale à 1 :

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

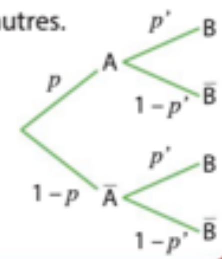
$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$

Évènements indépendants

- A et B sont deux évènements de probabilité non nulle d'un même univers.
  A et B sont indépendants signifie $P_A(B) = P(B)$ qui est équivalent à $P_B(A) = P(A)$.
- **A et B sont indépendants si seulement si :**
  - $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants ;
  - $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Successions d'expériences aléatoires indépendantes

- Des expériences aléatoires qui se succèdent sont indépendantes si le résultat de chacune n'influe pas sur le résultat des autres.
- On peut représenter la succession de ces épreuves indépendantes par un arbre de probabilités.



$P(\bar{A}\,;\,B) = (1-p) \times p'$

Fréquences conditionnelles

Contexte

On considère la population des élèves qui ont passé le baccalauréat en 2022. Sur cette population, on étudie les caractères « résultat au baccalauréat » et « élève d'une série ». Les résultats au baccalauréat 2022 s'établissent suivant le tableau croisé d'effectifs ci-contre (*Source : DEPP*).

	Admis A	Refusés R	Total
Série générale G	362 507	14 741	377 248
Séries techno T	131 302	13 687	144 989
Séries pro P	170 491	36 698	207 189
Total	664 300	65 126	729 426

Définition

La fréquence du caractère « A » dans la population E est le nombre $f(A) = \frac{card\ (A)}{card\ (E)}$.

Une fréquence peut s'exprimer sous forme d'une fraction, d'un nombre décimal ou d'un pourcentage.

Exemple de fréquence conditionnelle en ligne

La fréquence conditionnelle $f_T(A) \approx 0{,}91$. Cela signifie que, parmi la sous-population de référence des élèves des séries technologiques T (**c'est la condition**), environ 91 % ont été admis (A).

	Admis A	Refusés R	Total
Séries techno T	$\frac{131\,302}{144\,989} \approx 0{,}91$	$\frac{13\,687}{144\,989} \approx 0{,}09$	$0{,}91 + 0{,}09 = 1$

Exemple de fréquence conditionnelle en colonne

La fréquence conditionnelle $f_R(P) \approx 0{,}56$. Cela signifie que, parmi la sous-population de référence des élèves refusés R (**c'est la condition**), environ 56 % viennent des séries professionnelles.

	Refusés R
Série générale G	$\frac{14\,741}{65\,126} \approx 0{,}23$
Séries techno T	$\frac{13\,687}{65\,126} \approx 0{,}21$
Séries pro P	$\frac{36\,698}{65\,126} \approx 0{,}56$
Total	1

Savoir-Faire

Méthode 1 Calculer des fréquences conditionnelles

On considère la population des élèves d'une classe de Première générale. Sur cette population, on étudie les caractères « régime » et « genre ».

Les résultats sont présentés dans le tableau croisé d'effectifs ci-contre.

Les réponses seront données à l'aide d'un pourcentage éventuellement arrondi au dixième de pourcent.

	Internes I	Demi-pensionnaires DP	Externes E	Total
Filles F	3	7	5	15
Garçons G	9	8	3	20
Total	12	15	8	35

1. Déterminer la fréquence conditionnelle des élèves demi-pensionnaires parmi les filles.
2. Déterminer la fréquence conditionnelle des garçons parmi les internes.
3. Déterminer la fréquence conditionnelle des filles parmi les externes.

Solution commentée

1 La sous-population de référence est l'ensemble des filles, l'effectif des filles est 15.
L'effectif des filles demi-pensionnaires est 7. La fréquence conditionnelle des élèves demi-pensionnaires parmi les filles est $f_F(DP) = \frac{7}{15} \approx 0,467$. Parmi les filles de la classe, environ 46,7 % sont des demi-pensionnaires.

2 La sous-population de référence est l'ensemble des internes, l'effectif des internes est 12.
L'effectif des garçons internes est 9. La fréquence conditionnelle des garçons parmi les internes est $f_I(G) = \frac{9}{12} = 0,75$. Parmi les internes, 75 % sont des garçons.

3 La sous-population de référence est l'ensemble des externes, l'effectif des externes est 8.
L'effectif des filles externes est 5. La fréquence conditionnelle des filles parmi les externes est $f_E(F) = \frac{5}{8} = 0,625$. Parmi les externes, 62,5 % sont des filles.

À TON TOUR

Dans une classe de Première, la répartition des 35 élèves se fait de la façon suivante.

	Filles	Garçons	Total
Spécialité maths	7	15	
Pas spécialité maths	8	5	
Total			

1. Recopier le tableau et compléter les marges.
2. Calculer la fréquence conditionnelle des garçons parmi les élèves ayant choisi la spécialité mathématique.
3. Calculer la fréquence conditionnelle des élèves ayant choisi la spécialité mathématique parmi les filles.

Fréquences marginales

Définition

On appelle **fréquence marginale,** le quotient de la somme des effectifs d'une ligne (ou d'une colonne) par l'effectif total.

Exemple

On extrait du tableau d'effectifs croisés en haut de page la ligne ci-contre. On rappelle que la population totale des élèves qui ont passé le baccalauréat en 2022 compte 729 426 individus.

	Admis	Refusés	Total
Séries techno	131 302	13 687	144 989

La fréquence marginale des élèves des séries technologiques est égale à $\frac{144\,989}{729\,426} \approx 0,199$.

Cela signifie qu'environ 20 % des élèves passant le baccalauréat en 2022 proviennent des séries technologiques.

Remarque

- Les colonnes et lignes intitulées "Total" s'appellent les marges du tableau.
- Les fréquences marginales s'appellent ainsi car, pour les calculer, on utilise les valeurs inscrites dans les marges du tableau.
- A partir d'un tableau de fréquences, la somme des fréquences marginales obtenues pour chacune des lignes (des colonnes) est égale à 1.

Savoir-Faire

Méthode 2 Calculer des fréquences marginales

Le tableau ci-contre donne la répartition des élèves de Première générale en 2021 par spécialités et genre.

(*Source : DEPP*)

Les réponses seront données à l'aide d'un pourcentage arrondi au dixième.

1 Déterminer la fréquence marginale des filles en Première générale.

2 Déterminer la fréquence marginale des élèves ayant choisi la spécialité SES.

	Filles	Garçons	Total
Maths	55 928	84 720	140 648
SES	81 568	52 885	134 453
PC	55 571	61 565	117 136
HGGSP	65 323	39 912	105 235
SVT	61 206	35 473	96 679
LLCER	51 365	20 265	71 630
HLP	31 562	7 591	39 153
NSI	2 215	13 969	16 184
SI	1 013	6 604	7 617
Total	405 751	322 984	728 735

Solution commentée

1. L'effectif total des élèves de Première générale est 728 735. Le nombre de filles en Première générale est 405 751. La fréquence marginale des filles en Première générale est $\frac{405\,751}{728\,735} \approx 0{,}557$.
55,7 % des élèves de Première générale sont des filles.

2. L'effectif total des élèves de Première générale est 728 735. Le nombre d'élèves qui suivent la spécialité SES est 134 453. La fréquence marginale des élèves de première générale qui suivent la spécialité SES est $\frac{134\,453}{728\,735} \approx 0{,}185$.
18,5 % des élèves de Première générale suivent la spécialité SES.

À TON TOUR

Dans une PME, l'effectif des employés se répartit de la façon suivante.

	Cadres	Employés
Parle anglais	25	52
Ne parle pas anglais	8	15

1. Recopier le tableau en y ajoutant les marges.
2. Calculer la fréquence marginale des employés parlant anglais.

Probabilités conditionnelles : lien fréquence - probabilités	
Contexte	On considère une seule expérience aléatoire d'univers E.
Propriété	**Loi des grands nombres :** Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue se stabilise autour d'une valeur. On prend cette valeur comme probabilité de l'issue.

Probabilités conditionnelles : Probabilité de A sachant B

Définition

Probabilité de A sachant B :
A et B sont deux évènements d'un même univers E, tels que $card\ (B) \neq 0$.
La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé, notée $P_B(A)$, est donnée ci-contre par :

$$P_B(A) = \frac{card\ (A \cap B)}{card\ (B)}$$

Conséquence

Si A et B sont deux évènements d'un même univers E, tels que $P(B) \neq 0$, alors :

$$P_B(A) = \frac{card\ (A \cap B)}{card\ (B)} = \frac{card\ (A \cap B)}{card\ (E)} \times \frac{card\ (E)}{card\ (B)} = \frac{card\ (A \cap B)}{card\ (E)} \div \frac{card\ (B)}{card\ (E)}$$

$$= \frac{P\ (A \cap B)}{P\ (B)}$$

Exemple

Un sac contient 40 boules. Les boules sont rouges ou vertes et certaines sont en frêne, les autres sont en chêne.
La répartition est donnée par le tableau croisé d'effectifs ci-contre.

	Rouge	Verte	Total
Frêne	13	17	30
Chêne	2	8	10
Total	15	25	40

Exemple (suite)

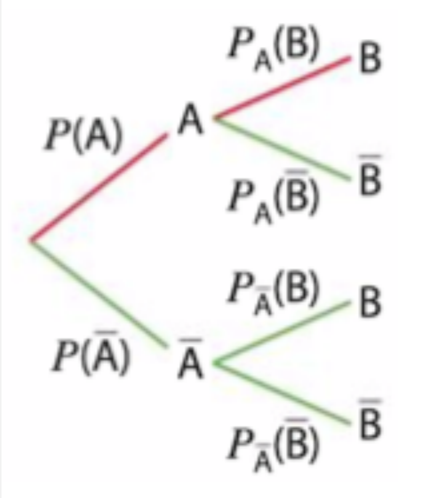
On note V l'événement « Tirer une boule verte » et C l'évènement « Tirer une boule en chêne ».
On tire au hasard une boule dans le sac.

Probabilité de tirer une boule verte sachant qu'elle est en chêne : $P_C(V) = \dfrac{\text{card}(C \cap V)}{\text{card}(C)} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

Probabilités conditionnelles : Arbre pondéré

Définition

On peut représenter une expérience aléatoire par un arbre pondéré de probabilités.
Un arbre pondéré de probabilités est constitué de branches.
Les évènements élémentaires $A, \bar{A}, B, \bar{B}$, s'appellent des nœuds.
$\bar{A}$ est l'événement contraire de A.



Propriétés

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1. Ici, on a par exemple $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.
- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin (constitué de plusieurs branches) est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin.
  Ici, par exemple la probabilité de l'événement correspondant au chemin rouge est $P(A) \times P_A(B)$, ce qui est, par définition, égal à $P\,(A \cap B)$.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins menant à cet événement.
  Ici, on a $P(B) = P(A \cap B) + P\,(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$

Savoir-Faire

Méthode 3 Calculer une probabilité à partir d'un tableau croisé d'effectifs

Marius achète une boîte de 500 petits fours surgelés. Ils sont ronds ou carrés. Certains sont au saumon, d'autres aux légumes.
La répartition est donnée dans le tableau croisé d'effectifs ci-contre.

	Rond (R)	Carré (C)	Total
Saumon (S)	150	200	350
Légumes (L)	50	100	150
Total	200	300	500

Marius choisit un petit four au hasard dans la boîte.

1. Déterminer la probabilité que le petit four soit aux légumes.
2. Déterminer la probabilité que le petit four soit rond et aux légumes.
3. Déterminer la probabilité que le petit four soit au saumon sachant qu'il est rond.

Solution commentée

1. On cherche $P(L)$.
$P(L) = \dfrac{\text{card}(L)}{500} = \dfrac{150}{500} = 0{,}3$. La probabilité de prendre un petit four aux légumes est égale à 0,3.

2. On cherche $P(R \cap L)$.
$P(R \cap L) = \dfrac{\text{card}(L \cap R)}{500} = \dfrac{50}{500} = 0{,}1$. La probabilité que le petit four soit rond et aux légumes est égale à 0,1.

3. On cherche $P_R(S)$.
$P_R(S) = \dfrac{\text{card}(R \cap S)}{\text{card}(R)} = \dfrac{150}{200} = 0{,}75$. La probabilité que le petit four soit au saumon sachant qu'il est rond est égale à 0,75.

À TON TOUR

Savoir-Faire (Suite)

Un sachet contient 100 trombones.
Dans le sachet, il y a 10 grands trombones jaunes, 75 petits trombones et 65 trombones rouges.

1. Recopier et compléter le tableau.

	Petits ($\overline{G}$)	Grands (G)	Total
Jaunes (J)			
Rouges ($\overline{J}$)			
Total			

On prend un trombone au hasard.

2. Calculer la probabilité que le trombone soit rouge.
3. Calculer $P\left(\overline{J} \cap G\right)$ et interpréter le résultat.
4. Déterminer la probabilité que le trombone soit petit et jaune.

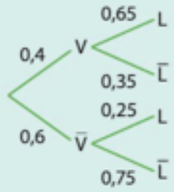
Savoir-Faire (Suite)

Méthode 4 Modéliser par un arbre pondéré

Dans un magasin bio, certains produits sont proposés en vrac, les autres sont déjà emballés. On note V l'évènement « Le produit est proposé en vrac ». Parmi les produits proposés, on trouve des produits élaborés localement et les autres proviennent de secteurs géographiques plus éloignés. On note L l'évènement « Le produit a été élaboré localement ».

On choisit un produit au hasard.

L'arbre de probabilités illustrant les ventes des différents produits selon leur type d'emballage puis leur provenance est proposé ci-contre.

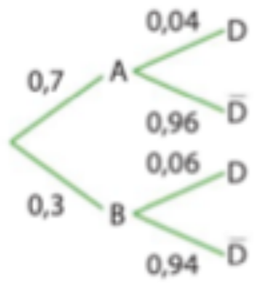


1. Déterminer la probabilité que le produit soit proposé en vrac.
2. Déterminer la probabilité que le produit soit proposé en vrac et élaboré localement.
3. Déterminer la probabilité que le produit soit élaboré localement sachant qu'il est proposé en vrac.
4. Déterminer la probabilité que le produit ait été élaboré localement.

Solution commentée

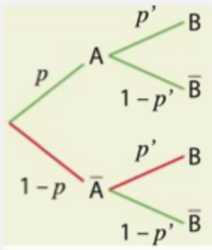
1. On cherche $P(V)$. On lit sur la première famille de branches $P(V) = 0,4$.
2. On cherche $P(V \cap L)$. Le chemin correspondant est V – L. Pour obtenir la probabilité d'un chemin, on fait le produit des probabilités notées sur le chemin : $P(V \cap L) = 0,4 \times 0,65 = 0,26$.
3. On cherche $P_V(L)$. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle, on se place au second niveau des branches. La probabilité cherchée est celle inscrite sur la branche partant de V et rejoignant L : $P_V(L) = 0,65$.
4. On cherche $P(L)$. La probabilité cherchée est celle des deux branches V – L et $\overline{V}$ – L de l'arbre.
$P(L) = P(V \cap L) + P\left(\overline{V} \cap L\right) = 0,26 + 0,6 \times 0,25 = 0,41$

À TON TOUR

Savoir-Faire (Suite)	Une coopérative commercialise des biscuits produits par deux entreprises différentes A et B. Parmi les biscuits, certains présentent un défaut (casse, taille, …). On note D l'évènement « Le biscuit présente un défaut ». On obtient l'arbre pondéré suivant.  **1.** Donner la probabilité que le biscuit présente un défaut sachant qu'il est produit par l'entreprise A. **2.** Donner $P_B(\bar{D})$ et interpréter le résultat obtenu. **3.** Calculer $P(A \cap \bar{D})$ et interpréter le résultat obtenu.

Indépendance: Evénements indépendants	
Contexte	On considère une seule expérience aléatoire d'univers E.
Définition	On considère un événement A de probabilité non nulle. Un événement B est indépendant de A lorsque $P_{A\,(B)} = P(B)$.
Propriété	▪ Si B est indépendant de A, alors A est indépendant de B et $P\,(A \cap B) = P(A) \times P\,(B)$ ▪ Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$ ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.
Remarque	• $P_A(B) = P(B)$ signifie que la réalisation ou non de l'évènement A n'a pas d'influence sur la réalisation de l'évènement B. • Il ne faut pas confondre évènements indépendants et évènements **incompatibles** : deux évènements sont incompatibles si et seulement si $P(A \cap B) = 0$, ce qui signifie que les évènements A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Savoir-Faire	**Méthode 5 Étudier l'indépendance de deux évènements** Un jeu de 32 cartes est constitué de quatre couleurs : pique, cœur, carreau et trèfle. Dans chaque couleur il y a huit valeurs : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As. Un jeu consiste à tirer une carte au hasard dans le jeu de 32 cartes. 1 Les évènements R « Obtenir un roi » et C « Obtenir un cœur » sont-ils indépendants ? 2 Les évènements F « Obtenir la dame ou le roi de cœur » et C « Obtenir un cœur » sont-ils indépendants ? **Solution commentée** 1 Dans un jeu de 32 cartes, il y a quatre rois : $P(\text{R}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. Une seule carte est à la fois un roi et un cœur, c'est le roi de cœur. Dans un jeu de 32 cartes, il y a huit cœurs. $P_{\text{C}}(\text{R}) = \frac{\text{card}(\text{C} \cap \text{R})}{\text{card}(\text{C})} = \frac{1}{8}$ $P(\text{R}) = P_{\text{C}}(\text{R})$, donc les évènements R et C sont indépendants. 2 Il y a deux cartes qui sont une dame ou un roi de cœur, donc $P(\text{F}) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ et $P_{\text{C}}(\text{F}) = \frac{\text{card}(\text{C} \cap \text{F})}{\text{card}(\text{C})} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. $P(\text{F}) \neq P_{\text{C}}(\text{F})$, donc les évènements F et C ne sont pas indépendants.
Savoir-Faire (Suite)	**À TON TOUR** A et B sont deux évènements d'un même univers tels que $P(\text{A}) = 0{,}2$, $P(\text{B}) = 0{,}8$ et $P(\text{A} \cap \text{B}) = 0{,}16$. 1. A et B sont-ils indépendants ? 2. En déduire $P_{\text{A}}(\text{B})$ et $P_{\text{B}}(\text{A})$.

Indépendance: Succession d'épreuves indépendantes		
Contexte	On considère des expériences aléatoires qui se succèdent.	
Définition	Des expériences aléatoires qui se succèdent sont **indépendantes** si le résultat de chacune n'influe pas sur le résultat des autres (par exemple, tirages avec remise).	
Définition	On considère deux expériences aléatoires qui se succèdent. Si on note A un événement élémentaire de la première expérience tel que $P(A) = p$ et B un événement élémentaire de la deuxième expérience tel que $P(B) = p'$, on peut représenter la succession de ces expériences indépendantes par l'arbre de probabilites ci-contre.	
Remarque	Cette méthode de construction d'un arbre de probabilités permet également : • de représenter la succession de trois, quatre, … expériences aléatoires indépendantes ; • de représenter la répétition de manière indépendante d'une même expérience aléatoire.	
Propriété	La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités de chaque branche du chemin.	
Exemple	La probabilité que l'évènement « A ne se réalise pas puis B se réalise » se note $P(\bar{\text{A}}\,;\text{B})$ et on a $P(\bar{\text{A}}\,;\text{B}) = (1-p) \times p'$ (en rouge sur l'arbre ci-dessus).	

Savoir-Faire

Méthode 6 Étudier une succession d'expériences indépendantes

Une urne opaque renferme cinq boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 5 dont deux sont rouges et trois sont vertes.

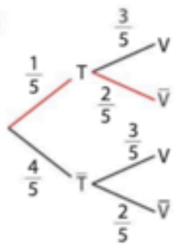
On tire au hasard une boule et on s'intéresse à son numéro, puis on remet la boule dans l'urne. On effectue alors un deuxième tirage au hasard et on considère la couleur de la boule.

On note T l'évènement « Obtenir le 3 » lors du premier tirage.

On note V l'évènement « Obtenir une boule verte » au deuxième tirage.

1. Expliquer pourquoi ces deux tirages aléatoires sont indépendants.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement T puis celle de l'évènement V.
3. Que signifie $P(\mathrm{T}\,;\overline{\mathrm{V}})$?
4. Construire un arbre illustrant la situation et en déduire $P(\mathrm{T}\,;\overline{\mathrm{V}})$.

Solution commentée

1. Les deux tirages sont indépendants car il y a remise de la boule dans l'urne après le premier tirage.
2. $P(\mathrm{T}) = \frac{1}{5}$: la probabilité de tirer le 3 est $\frac{1}{5}$. $P(\mathrm{V}) = \frac{3}{5}$: la probabilité de tirer une boule verte est $\frac{3}{5}$.
3. $P(\mathrm{T}\,;\overline{\mathrm{V}})$ est la probabilité d'obtenir « le trois au premier tirage puis une boule rouge au deuxième tirage ».
4. 

donc $P(\mathrm{T}\,;\overline{\mathrm{V}}) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$: la probabilité de tirer une boule numérotée 3 en premier puis une boule rouge en second est de $\frac{2}{25}$.

À TON TOUR

Savoir-Faire (Suite)

À TON TOUR

Un garagiste possède un stock important de pneus. 2 % des pneus possèdent un défaut. Pour équiper les roues arrière d'un véhicule, le garagiste choisit un premier pneu au hasard et vérifie s'il possède ou non un défaut. Puis il en choisit un second au hasard et vérifie à nouveau s'il possède un défaut. Le stock de pneus est suffisamment important pour considérer que les choix des deux pneus sont indépendants.

On note D l'évènement « Le pneu possède un défaut ».

1. Calculer la probabilité que les deux pneus choisis possèdent un défaut.
2. Calculer la probabilité pour qu'aucun des deux pneus ne possède de défaut.