Variation globale

Ce qu'il faut retenir

Fonction dérivée des fonctions de référence

Fonction f	Fonction dérivée f'
Fonction constante : $f(x) = k$ avec k réel	$f'(x) = 0$
Fonction identité : $f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Fonction carré : $f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Fonction cube : $f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Dérivée d'une somme de fonctions et d'un produit d'une fonction par un réel

- $(u+v)' = u' + v'$
- Soit k un réel, $(k \times u)' = k \times u'$.

Dérivée des polynômes de degré inférieur ou égal à 3

Fonction polynôme f	Fonction dérivée f'
Fonction affine : $f(x) = ax + b$ avec a et b réels, $a \neq 0$	$f'(x) = a$
Fonction du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels, $a \neq 0$	$f'(x) = 2ax + b$
Fonction de degré 3 : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d réels, $a \neq 0$	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Lien entre signe de la fonction dérivée et variations de la fonction f

- f est **croissante** sur $I = [a\,;b]$ si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$.

x	a	b
Signe de $f'(x)$	+	
Variation de f	$\nearrow$	

- f est **décroissante** sur $I = [a\,;b]$ si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$.

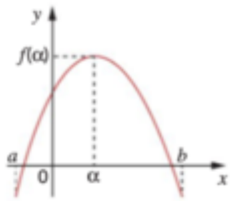
x	a	b
Signe de $f'(x)$	−	
Variation de f	$\searrow$	

- f est **constante** sur $I = [a\,;b]$ si et seulement si $f'(x) = 0$.

Extremums

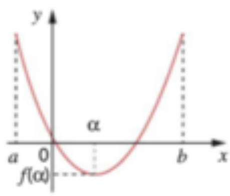
x	a	α	b
Variation de f	$f(a)$ $\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$ $f(b)$

- On dit que $f(\alpha)$ est le maximum de f sur $[a\,;b]$ et qu'il est atteint en α.



x	a	α	b
Variation de f	$f(a)$ $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$ $f(b)$

- On dit que $f(\alpha)$ est le minimum de f sur $[a\,;b]$ et qu'il est atteint en α.



- Si f admet un extrémum en α, alors $f'(\alpha) = 0$ (avec α qui n'est pas une borne de l'ensemble de définition).

Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I qui admet un nombre dérivé $f'(x)$ en tout réel x de I.
On appelle **fonction dérivée de f sur I**, notée f', la fonction définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$.

Propriété

Les fonctions dérivées des fonctions de référence sur $\mathbb{R}$ sont les suivantes.

Fonction f	Fonction dérivée f'
Fonction constante : $f(x) = k$ avec k réel	$f'(x) = 0$
Fonction identité : $f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Fonction carré : $f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Fonction cube : $f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Savoir-Faire

Méthode 1 Calculer la dérivée d'une fonction

1. On donne les quatre fonctions k, i, c et b définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$k(x) = -5 \,;\, i(x) = x \,;\, c(x) = x^2 \text{ et } b(x) = x^3.$$
Calculer les dérivées de ces quatre fonctions.
2. On donne les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$u(x) = -5 + x \text{ et } v(x) = x^2 + x^3.$$
Calculer les dérivées de ces deux fonctions.
3. Calculer les dérivées des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3x \,;\, g(x) = -4x^2 \text{ et } h(x) = -2x^3.$$

Solution commentée

1. D'après le cours, on a :
   - $k'(x) = 0$ car k est une fonction constante ;
   - $i'(x) = 1$ car i est la fonction identité $x \mapsto x$;
   - $c'(x) = 2x$ car c est la fonction carré ;
   - $b'(x) = 3x^2$ car b est la fonction cube.

2. • On a $u(x) = k(x) + i(x)$ pour tout réel x.
D'après la propriété de la dérivée d'une somme de deux fonctions, on obtient :
$$u'(x) = k'(x) + i'(x) = 0 + 1 = 1.$$
• On a $v(x) = c(x) + b(x)$ pour tout réel x.
D'après la propriété de la dérivée d'une somme de deux fonctions, on obtient :
$$v'(x) = c'(x) + b'(x) = 2x + 3x^2.$$

3. • On a $f(x) = 3i(x)$ pour tout réel x.
D'après la propriété de la dérivée du produit par un réel, on obtient $f'(x) = 3i'(x) = 3 \times 1 = 3$.
• On a $g(x) = -4c(x)$ pour tout réel x.
D'après la propriété de la dérivée du produit par un réel, on obtient $g'(x) = -4c'(x) = -4 \times 2x = -8x$.
• On a $h(x) = -2b(x)$ pour tout réel x.
D'après la propriété de la dérivée du produit d'une fonction par un réel, on obtient :
$$h'(x) = -2b'(x) = -2 \times 3x^2 = -6x^2.$$

Savoir-Faire (Suite)

À TON TOUR

1. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 6 + x,$$
$$g(x) = x^2 + 3$$
$$\text{et } h(x) = x^3 + x.$$
Calculer $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.
2. Soient u, v et w trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$u(x) = 3x,$$
$$v(x) = -6x^2$$
$$\text{et } w(x) = -4x^3.$$
Calculer $u'(x)$, $v'(x)$ et $w'(x)$.

Propriété

Soient u et v deux fonctions qui admettent une fonction dérivée sur un intervalle I.

- La fonction $u+v$ admet une fonction dérivée sur I et
$$(u+v)' = u' + v'$$
- Soit k un réel. La fonction $k \times u$ admet une fonction dérivée sur I et
$$(k \times u)' = k \times u'$$

Propriété

Un polynôme est constitué d'une somme de termes. Chaque terme est l'expression d'une fonction de référence ou du produit d'une fonction de référence par un réel.

Pour calculer la fonction dérivée d'un polynôme, il suffit de dériver « chaque terme » et d'en faire la somme.

Fonction polynôme f	Fonction dérivée f'
Fonction affine : $f(x) = ax + b$ avec a et b réels, $a \neq 0$	$f'(x) = a$
Fonction du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels, $a \neq 0$	$f'(x) = 2ax + b$
Fonction de degré 3 : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d réels, $a \neq 0$	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Savoir-Faire

Méthode 2 Calculer la dérivée d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3

Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer leurs fonctions dérivées.

a. $f(x) = 6 - 2x$ b. $g(x) = 7x^2 - 5x$ c. $r(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8$

Solution commentée

Un polynôme est constitué d'une somme de termes. Chaque terme est l'expression d'une fonction de référence ou du produit d'une fonction de référence par un réel.
D'après la propriété de la dérivée d'une somme, pour calculer la fonction dérivée d'un polynôme, il suffit de dériver « chaque terme » et d'en faire la somme.

a. $f(x) = 6 - 2x$
f est la somme d'une fonction constante et du produit de la fonction identité par -2.
On obtient donc $f'(x) = 0 + (-2) \times 1 = -2$.

b. $g(x) = 7x^2 - 5x$
g est la somme de 7 fois la fonction carré et de -5 fois la fonction identité.
On obtient donc $g'(x) = 7 \times 2x - 5 \times 1 = 14x - 5$.

c. $r(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8$
g est la somme de 2 fois la fonction cube, de -5 fois la fonction carré et d'une fonction constante.
On obtient donc $r'(x) = 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 0 = 6x^2 - 10x$.

Savoir-Faire (Suite)

Soient f, g et h trois fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 - 3x + 2,\ g(x) = x^3 - 5x^2 + 2x$$
$$\text{et } h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 9.$$
Calculer $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.

Applications de la dérivation : Signe de la dérivée et sens de variation

Propriété

Soit f une fonction qui admet une fonction dérivée sur un intervalle $I = [a;\ b]$ de $\mathbb{R}$ (a ou b peuvent être soit des réels, soit $-\infty$, soit $+\infty$).

- f est croissante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.

On peut représenter cela dans un tableau de variation.

x	a	b
Signe de $f'(x)$	+	
Variation de f	↗	

- f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.

On peut représenter cela dans un tableau de variation.

x	a	b
Signe de $f'(x)$	–	
Variation de f	↘	

- f est constante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$.

Exemple

Soit la fonction cube f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
On a alors, pour tout nombre réel x, $f'(x) = 3x^2$.
Pour tout nombre réel x, $f'(x) \geqslant 0$, donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Savoir-Faire

Méthode 3 Déterminer le signe de la dérivée et les variations de la fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;3]$ par $f(x) = -2x^3 - 1{,}5x^2 + 18x + 26$.

1. Montrer que la dérivée peut s'écrire sous cette forme factorisée :
$$f'(x) = (3x+6)(3-2x).$$
2. Étudier le signe de la dérivée.
3. Déduire les variations de la fonction f.

Solution commentée

1. On dérive la fonction f : $f'(x) = -6x^2 - 3x + 18$.
On développe :
$(3x+6)(3-2x) = 9x - 6x^2 + 18 - 12x$
$= -6x^2 - 3x + 18$
On a ainsi montré que $f'(x) = (3x+6)(3-2x)$.
La factorisation de $f'(x)$ permet d'étudier son signe.

2. On dresse alors le tableau de signes du produit $(3x+6)(3-2x)$ s'annulant pour $x = -2$ ou $x = \frac{3}{2}$.

x	-3		-2		$\frac{3}{2}$		3
Signe de $3x+6$		–	0	+		+	
Signe de $3-2x$		+		+	0	–	
Signe du produit $(3x+6)(3-2x) = f'(x)$		–	0	+	0	–	

3. On en déduit les variations de f sachant que :
- sur $[-3\,;-2]$, on a $f'(x) \leqslant 0$, donc f est décroissante sur cet intervalle ;
- sur $\left[-2\,;\frac{3}{2}\right]$, on a $f'(x) \geqslant 0$, donc f est croissante sur cet intervalle ;
- sur $\left[\frac{3}{2}\,;3\right]$, on a $f'(x) \leqslant 0$, donc f est décroissante sur cet intervalle.

x	-3		-2		$\frac{3}{2}$		3
Signe de $f'(x)$		–	0	+	0	–	
Variation de f	12,5	↘	0	↗	42,875	↘	12,5

À TON TOUR

Savoir-Faire (Suite)

La fonction m est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$m(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 7.$$

1. Calculer la dérivée $m'(x)$.
2. Vérifier que cette dérivée s'écrit :
$$m'(x) = (3x - 1)(x + 2).$$
3. Dresser le tableau de signes de $m'(x)$.
4. Donner un intervalle sur lequel m est croissante.

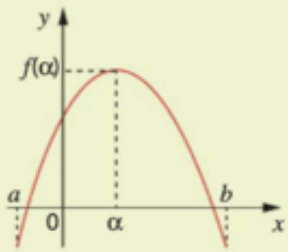
Applications de la dérivation : Extremum d'une fonction

Définition

Le **maximum** (respectivement **minimum**) d'une fonction f sur un intervalle $[a;\ b]$ est, s'il existe, la plus grande (respectivement plus petite) valeur des images $f(x)$ pour tout réel x appartenant à $[a;\ b]$.

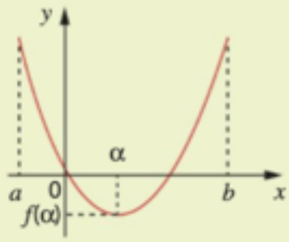
x	a	α	b
Variation de f	$f(a)$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $f(b)$

• On dit que $f(\alpha)$ est le maximum de f sur $[a\ ;b]$ et qu'il est atteint en α.



x	a	α	b
Variation de f	$f(a)$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $f(b)$

• On dit que $f(\alpha)$ est le minimum de f sur $[a\ ;b]$ et qu'il est atteint en α.



Propriété

Soit f une fonction définie et admettant une fonction dérivée sur un intervalle I.
Soit $\propto$ un réel appartenant à I qui n'est pas une borne de I.
Si f admet un extremum en $\propto$, alors $f'(\propto) = 0$.

Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse.

Savoir-Faire

Méthode 4 Déterminer un extremum

Soit t la fonction polynôme de degré 2 définie sur $[-5\ ;8]$ par $t(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

1. Montrer que cette fonction admet un minimum qu'on déterminera.
2. En quelle valeur ce minimum est-il atteint ?

Solution commentée

1. Soit t la fonction de degré 2 définie sur $[-5\ ;8]$ par :
$$t(x) = 3x^2 - 6x + 2.$$
On calcule l'expression de la fonction dérivée de t.
On obtient $t'(x) = 3 \times 2x - 6 = 6x - 6$.
On étudie le signe de $t'(x)$.
$t'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 6x - 6 \geqslant 0$
$\Leftrightarrow x \geqslant 1$
On obtient alors le tableau de variations ci-contre.
Le minimum de t sur $[-5\ ;8]$ est -1.

x	-5		1		8
Signe de $t'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de t	107	↘	-1	↗	146

2. Ce minimum est atteint en $x = 1$.

À TON TOUR

Savoir-Faire (Suite)

À TON TOUR

On considère une fonction f définie sur $[-3\ ;\ 10]$ pour laquelle on a dressé le tableau suivant.

x	-3		2		10
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f					

On admet que :

$$f(-3) = -25,\ f(2) = 50 \text{ et } f(10) = 22{,}5.$$

1. Compléter le tableau de variation de f.
2. La fonction f admet-elle un maximum ? Si oui, quelle est sa valeur et en quel nombre est-il atteint ?