Variation instantanée

Ce qu'il faut retenir

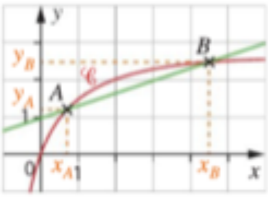
Coefficient directeur d'une sécante

Soient A et B deux points distincts d'une courbe $\mathscr{C}$.

La droite (AB) est appelée sécante à la courbe $\mathscr{C}$ en A et B.

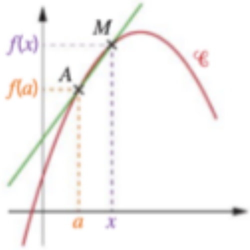
Le coefficient directeur de cette sécante est égal au quotient :

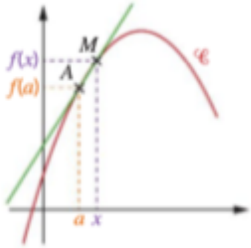
$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}.$$

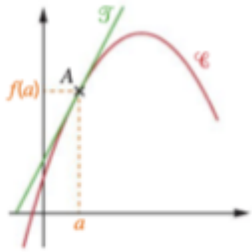


Tangente en un point d'une courbe

Lorsque, sur une courbe $\mathscr{C}$, un point M se rapproche de plus en plus d'un point A, les sécantes (AM) se rapprochent d'une position limite appelée tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A.

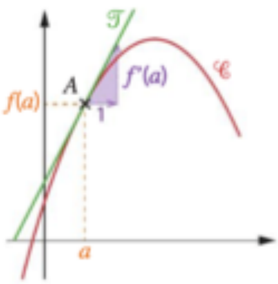






Nombre dérivé en un réel

Le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}$ au point A d'abscisse a est appelé **nombre dérivé de f en a**. Il est noté **$f'(a)$**.

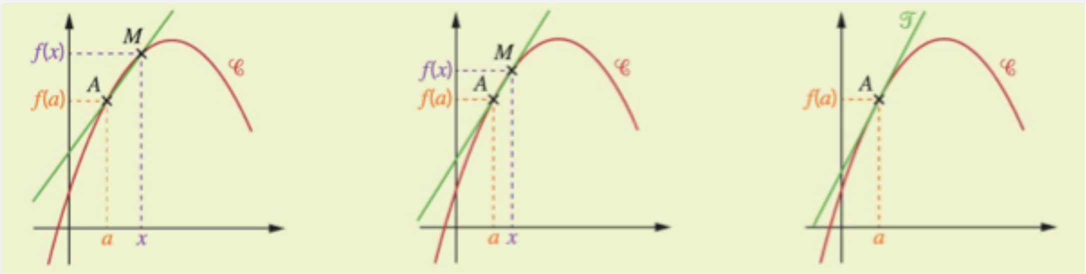


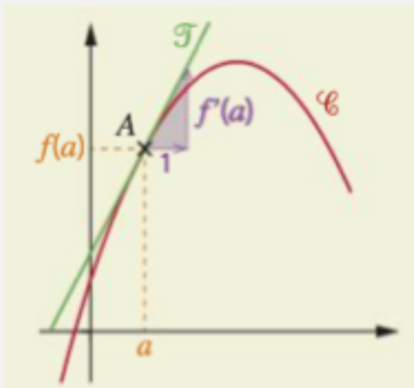
Dans le cadre d'une évolution au cours du temps t, $f'(a)$ représente la **vitesse instantanée** à l'instant $t = a$.

Pente d'une tangente

Soit $\mathscr{T}$ la tangente au point $A(a\,;f(a))$ d'une courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f.

- La tangente $\mathscr{T}$ « monte » équivaut à $f'(a) \geqslant 0$.
- La tangente $\mathscr{T}$ « descend » équivaut à $f'(a) \leqslant 0$.

Tangente à une courbe en un point	
Définition	Soit f une fonction définie sur un intervalle I et de courbe représentative $\mathcal{C}$. La droite passant par deux points distincts A et B de la courbe $\mathcal{C}$ est appelée **sécante à la courbe représentation de f** en $A\ (a, f\ (a))$ et $B\ (b\ ;\ f\ (b))$. Le coefficient directeur de cette sécante est le quotient : $$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
Remarque	• Le coefficient directeur s'appelle aussi la **pente** de la droite (AB). • En physique par exemple, si $y = f(x)$, on utilise la notation $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Définition	Soit f une fonction définie sur un intervalle I et de courbe représentative $\mathcal{C}$. Soient $A\ \big(a, f\ (a)\big)$ un point de $\mathcal{C}$ et $M\ \big(x\ ;\ f\ (x)\big)$ un point mobile de $\mathcal{C}$. Lorsque M se rapproche de plus en plus de A, les sécantes (AM) tendent vers une position limite. La droite obtenue lors de cette position limite est appelée **tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en A**. 

Nombre dérivé d'une fonction en un réel a		
Définition	Soit f une fonction définie sur un intervalle I et de courbe représentative $\mathcal{C}$. Soit $A\ \big(a, f\ (a)\big)$ un point de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en A. Le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ au point A d'abscisse a est appelé **nombre dérivé de f en a**. Il est noté $f'\ (a)$.	
Propriété	Soit $\mathcal{T}$ la tangente au point $A\ \big(a, f\ (a)\big)$ d'une courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction f. ▪ La tangente $\mathcal{T}$ « monte » équivaut à $f'\ (a)\ \geq 0$. ▪ La tangente $\mathcal{T}$ « descend » équivaut à $f'\ (a) \leq 0$.	
Propriété	Dans le cadre d'une évolution au cours du temps t, modélisée par une fonction f, le nombre dérivé en un réel a noté $f'\ (a)$ représente la vitesse instantanée à l'instant $t = a$.	

<table>
<tr>
<td>Savoir-Faire</td>
<td>

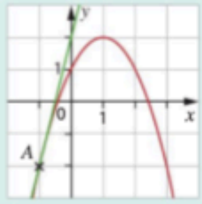
Méthode 1 Déterminer un nombre dérivé

On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ ainsi que sa tangente au point $A(-1\,;\,f(-1))$.

Déterminer $f'(-1)$:

a. graphiquement ;

b. à l'aide de la calculatrice.

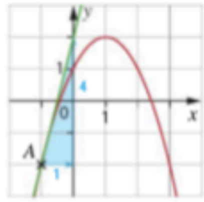


Solution commentée

a. $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
On peut déterminer ce coefficient directeur de deux façons différentes.

• La tangente passe par le point $A(-1\,;-2)$ et par le point de coordonnées $(0\,;2)$.
Son coefficient directeur est donc égal à $\frac{2-(-2)}{0-(-1)} = \frac{4}{1} = 4$. Donc $f'(-1) = 4$.

• À partir du point A, si on décale d'une unité vers la droite puis de quatre unités vers le haut, on arrive à un autre point de la tangente à $\mathscr{C}$ en A. Donc $f'(-1) = \frac{+4}{+1} = 4$.



b. • Avec une TI, on utilise le menu math 8:nbreDérivé(

On renseigne la boîte d'affichage $\frac{d}{dx}(-X^2+2X+1)|_{X=-1}$ 4

• Avec une Casio, on utilise le menu OPTN puis CALC puis d/dx

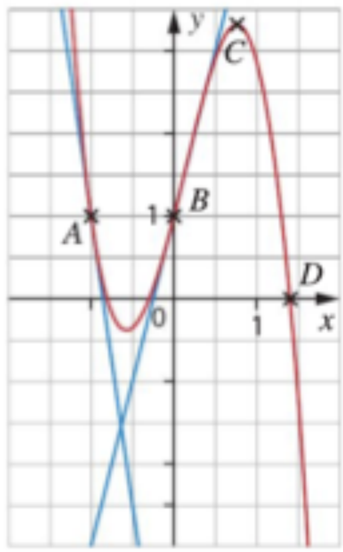
On renseigne la boîte d'affichage d/dx(-X²+2X+1,-1) 4

</td>
</tr>
<tr>
<td>Savoir-Faire
(Suite)</td>
<td>

On donne ci-contre la courbe de la fonction t et deux de ses tangentes.

1. Lire $t(-1)$, $t(0)$, $t'(-1)$ et $t'(0)$.

2. Soit a tel que $f'(a) = 0$.
Donner une valeur approchée possible pour a.



</td>
</tr>
</table>

Savoir-Faire (Suite)

Méthode 2 Interpréter un nombre dérivé

La distance parcourue en mètres par un mobile animé d'un mouvement rectiligne est donnée par la fonction $d(t) = t^2 - 3$, où t est un réel positif (exprimé en secondes) représentant le temps.

Calculer la vitesse instantanée de ce mobile à l'instant $t = 1$ s.

Solution commentée

Lorsqu'une fonction f modélise une évolution (distance parcourue, courbe de croissance, formation d'un produit dans une réaction chimique, etc. en fonction du temps), le nombre dérivé $f'(t)$ donne la vitesse instantanée à l'instant t de cette évolution.

La vitesse du mobile à l'instant $t = 1$ est donc égale à $d'(1)$.

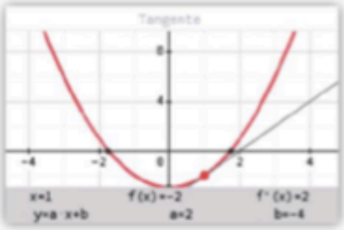
On peut utiliser une calculatrice pour déterminer $d'(1)$ (voir Boîte à outils p. 136).

• Avec la Numworks

Dans le menu, écrire l'expression de la fonction f : $f(x)=x^2-3$.

Utiliser la touche pour aller cocher Nombre dérivé.

Revenir au graphique. Le nombre dérivé est affiché au bas de l'écran.



On obtient $d'(1) = 2$. À l'instant $t = 1$, le mobile a une vitesse instantanée de 2 m/s.

À TON TOUR

Savoir-Faire (Suite)

Une voiture roulant en ligne droite parcourt une distance $d(t)$ (en mètres) donnée par la formule $d(t) = t^2 - t$, où t est le temps exprimé en secondes.

1. Quelle distance la voiture a-t-elle parcourue en 20 secondes ?
2. À l'aide d'une calculatrice, calculer la vitesse instantanée du véhicule à l'instant $t = 20$ s.