Approfondissement dérivation.

Approfondissement dérivation

Définition — **Composée d'une fonction**

Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et v une fonction définie sur l'intervalle J à valeurs dans un intervalle K.
La composée de u par v notée $v\ o\ u$ est la fonction définie sur I par $\boldsymbol{v\ o\ u\ (x) = v\ (\ u(x)\ )}$

$I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{v} K$
$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v\ o\ u\ \ (x)$
$v\ o\ u\ \ (x) = v(u(x))$

Exemple

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 1$ et v la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $v(x) = \sqrt{x}$. Alors $v\ o\ u$ est définie sur par $v\ o\ u(x) = v\left(\ u(x)\right) = v(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$.
$\mathbb{R} \xrightarrow{u} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{v} \mathbb{R}^+$
$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v\ o\ u\ \ (x)$

Exercice

Avec les mêmes fonctions définir $u\ o\ v(x)$

Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et g une fonction définie et dérivable sur un intervalle J à valeurs dans un intervalle K.
La composée de f par g notée $g\ o\ f$ est dérivable sur I et$\boldsymbol{(g\ o\ f\ )' = f' * g'o\ f}$
C'est-à-dire que pour tout x_0 de I on a $\boldsymbol{(g\ o\ f\ )'(x_0) = f'(x_0) * g'o\ f\ (x_0)}$

Démonstration (admise)

Soit x et y deux éléments distincts de E.
Si il existe un intervalle I centré autour de x tel que f est constante alors $f'(x) = 0$ mais gof est aussi constante sur cet intervalle donc $(gof)' = 0$ et on a bien $(gof)' = (g'of) * f'$
Dans le cas contraire, il existe un intervalle K centré autour de x tel que $\forall y \in K\ f(y) \neq f(x)$
On peut alors écrire $\forall y \in K\ \ \frac{gof(y)-gof(x)}{y-x} = \frac{gof(y)-gof(x)}{f(y)-f(x)} * \frac{(f(y)-f(x))}{y-x}$ (*)
f est dérivable en x donc $\lim\limits_{y \to x} \frac{(f(y)-f(x))}{y-x} = f'(x)$
f est continue en x donc $\lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$
Il vient en posant $z = f(y)$, $\lim\limits_{y \to x} \frac{gof(y)-gof(x)}{f(y)-f(x)} = \lim\limits_{z \to f(x)} \frac{g(z)-g(f(x))}{z-f(x)} = g'(f(x))$
Revenons à (*)

$$\lim_{y \to x} \frac{gof(y)-gof(x)}{y-x} = g'\left(f(x)\right) * f'(x)$$

Exemple

Soit u la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 1$ et v la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $v(x) = \sqrt{x}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$ $u'(x) = 2x$ et pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Il vient pour tout x de $\mathbb{R}$ $\quad (v\ o\ u\ )'(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)'(x) = u'(x) * v'o\ u\ (x) = 2x\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Propriétés

Soit u une fonction dérivable de dérivée u', a et b deux réels et n un entier naturel.

Fonction	Fonction dérivée
$au + b$	$au' + b$
u^2	$2uu'$
u^3	$3u^2u'$
u^n	$nu^{n-1}u'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$ (Là où u ne s'annule pas)

Fonction	Fonction dérivée
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (Là où $u > 0$)
$\cos u$	$-u'sin\ u$
$\sin u$	$u'\cos u$
e^u	$u'e^u$
$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$ (Là où u ne s'annule pas)

Exemple

$f(x) = (3x^2 - 5)^3$; $f'(x) = 3(3x^2 - 5)^2(3 * 2x) = 18x(3x^2 - 5)^2$