

## Probabilités

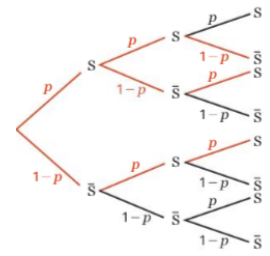
### Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

<b>Définition</b>	On considère un schéma de Bernoulli constitué de $n$ épreuves où la probabilité de succès est $p$ . $X$ est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès lors de ces $n$ épreuves. La loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ est appelée <b>loi binomiale de paramètres <math>n</math> et <math>p</math></b> . On la note $\mathcal{B}(n, p)$
<b>Remarque</b>	La variable aléatoire $X$ prend toutes les valeurs entières entre 0 (aucun succès) et $n$ (que des succès)
<b>Propriété</b>	Soit $k$ un entier naturel inférieur ou égal à $n$ et $X$ une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$ . $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

#### Démonstration

Dans un schéma de Bernoulli chaque chemin permettant d'obtenir  $k$  succès permet aussi d'obtenir  $n - k$  échecs. Chacun de ces chemins a donc pour probabilité  $p^k(1 - p)^{n-k}$  (En effet tous les tirages sont indépendants entre eux)  
Chaque chemin est déterminé par la donnée de ses  $k$  succès : le nombre de chemins menant à  $k$  succès est égal au nombre de combinaisons de  $k$  parmi  $n$ . On en déduit  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

#### Exemple avec $n = 3$



Il y a  $\binom{3}{2} = 3$  chemins permettant d'obtenir deux succès. Chacun d'eux correspond à une probabilité de  $p^2(1 - p)^1$

<b>Exemple</b>	<p>On tire trois fois, successivement et avec remise, une boule de l'urne ci-contre qui contient 2 boules rouges, 2 boules bleues et 1 boule verte. Pour chaque tirage on associe au succès S l'issue « la boule tirée est rouge » donc <math>p = \frac{2}{5} = 0,4</math></p>										
	<p>La variable aléatoire <math>X</math> qui compte le nombre de succès obtenus sur les <math>n = 3</math> tirages suit la loi binomiale de paramètres 3 et 0,4 c'est-à-dire <math>\mathcal{B}(3; 0,4)</math></p>										
	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> </div> <div style="width: 50%;"> <math display="block">P(X = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \approx 0,216</math> <math display="block">P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \approx 0,432</math> <math display="block">P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^1 \approx 0,288</math> <math display="block">P(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^0 \approx 0,064</math> </div> </div>										
<p>La loi de probabilité est donnée par le tableau :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>k</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td><math>P(X = k)</math></td> <td>0,216</td> <td>0,432</td> <td>0,288</td> <td>0,064</td> </tr> </table>	$k$	0	1	2	3	$P(X = k)$	0,216	0,432	0,288	0,064	<p>Voici ci-bas le diagramme en bâtons représentant graphiquement la loi <math>\mathcal{B}(3; 0,4)</math></p>
$k$	0	1	2	3							
$P(X = k)$	0,216	0,432	0,288	0,064							