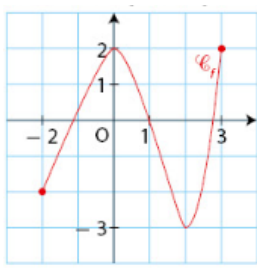
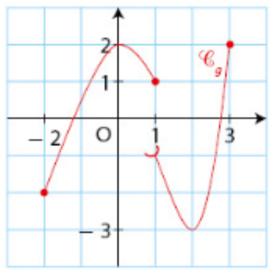
Continuité

Continuité en un point, continuité sur un intervalle

Définition	Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel de I. • Dire que f est **continue** en a, signifie que f admet une limite en a qui est $f(a)$. $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)\right)$ • Dire que f est **continue** sur l'intervalle I signifie que f est continue en tout réel de I.
Vocabulaire	Une fonction non continue en un réel a est dite **discontinue** en ce point.
Conséquence graphique	La continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par le fait que la courbe représentative de f sur I peut se tracer **sans lever le crayon.**
Exemples	La fonction f représentée ci-contre est continue sur l'intervalle [-2 ;3]  La fonction g représentée ci-contre n'est pas continue sur [-2 ;3] car elle est discontinue en 1 car elle n'admet pas de limite en $x = 1$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = g(1) = 0$ 
Propriété (admise)	• Si une fonction est dérivable en un réel a alors elle est continue en ce point. • Si une fonction est dérivable sur un intervalle I alors elle est continue sur cet intervalle.

Preuve

$$f(x) = f(x) - f(a) + f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a)$$

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$; $\lim_{x\to a}(x - a) = 0$; donc $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Continuité des fonctions usuelles

Propriétés (admise)	• Les fonctions **pôlynomes** ($x \to 3x^2 - 5x + 2$ par exemple) sont **continues** sur $\mathbb{R}$ • La fonction **exponentielle** ($x \to e^x$) est **continue** sur $\mathbb{R}$ • La fonction **racine carré** ($x \to \sqrt{x}$) est **continue** sur $[0; +\infty[$ • Toute fonction définie sur un intervalle I et obtenue par opération, composition, multiplication par un réel à partir des fonctions précédentes est continue sur I.
Exemples	• La fonction $x \to e^{3x-5}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En effet elle resulte de la composition de deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ **:** $x \to 3x - 5$ et $x \to e^x$ $x \to 3x - 5 \to e^{3x-5}$ • La fonction $6x^2 + 3\sqrt{x}$ est définie et continue sur $[0; +\infty[$. En effet elle resulte de l'addition de deux fonctions $x \to 6x^2$ et $x \to 3\sqrt{x}$ continues sur $[0; +\infty[$. • La fonction f définie sur l'intervalle $]5; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4e^x+1}{x-5}$ est le quotient de la fonction $x \to 4e^x + 1$ par la fonction $x \to x - 5$, les deux fonctions étant continues sur $]5; +\infty[$
Remarque	La fonction valeur absolue : $x \to \lvert x\rvert$ représentée ci-contre est continue sur $\mathbb{R}$