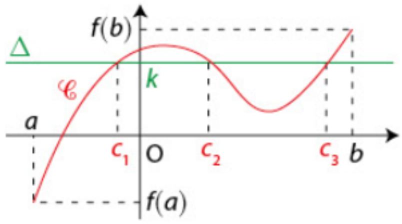
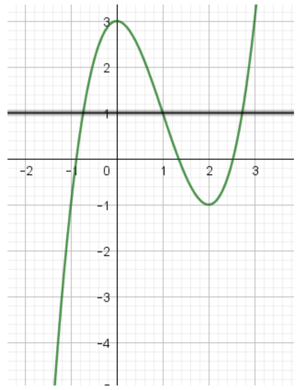
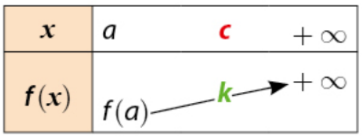
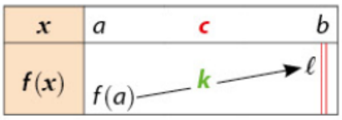
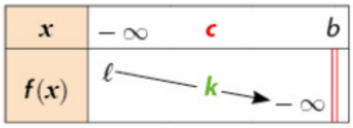
Continuité

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)		
Théorème TVI (admis)	Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. a et b désignent deux nombres réels de I tels que $a < b$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.	
Interprétation graphique	On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère. Pour tout réel $\boldsymbol{k}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite d'équation $y = k$ coupe **au moins une fois** la courbe $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse compris entre a et b.	
Exemple	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ Démontrons qu'il existe un réel $\boldsymbol{c}$ compris entre -2 et 0 tel que $f(c) = 1$. f est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-2\,;0]$. $f(-2) = -17; f(0) = 3;$ Donc $1 \in [f(-2); f(0)]$. D'après le TVI il existe un réel c appartenant à $[-2; 0]$ tel que $f(c) = 1$.	
Remarque	Soit f une fonction définie sur intervalle I avec a et b deux réels de I. $(a < b)$. Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Le TVI nous permet d'affirmer l'existence d'une racine à l'équation $\boldsymbol{f(x) = k}$. **Attention :** Il ne nous donne ni le nombre de racines, ni la valeur de ces racines. Pour trouver des valeurs approchées de ces racines, il faudra utiliser des algorithmes nous permettant de les encadrer.	

Cas des fonctions continues et strictement monotones.		
Propriété (admise)	Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** (strictement croissante ou strictement décroissante) sur un intervalle $[a\,;b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique solution** comprise entre a et b.	
Preuve		
Par l'absurde : Le TVI dans sa forme précédente nous assure l'existence d'un x tel que $f(x) = k$. Supposons qu'il y en ait deux. Il existe y aussi dans $[a; b]$ avec $y \neq x$ tel que $f(y) = k$. f est strictement monotone sur $[a\,;b]$. Donc si $y \neq x$ alors $f(y) \neq f(x)$, ce qui est en contradiction avec $f(y) = k = f(x)$		
Exemple	L'équation $e^x = 2$ admet une unique solution dans l'intervalle $I = [0; 1]$. En effet : • La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur l'intervalle I • 2 est compris entre $e^0 = 1$ et $e^1 \approx 2{,}72$.	x : 0 ; c ; 1 e^x : 1 ↗ 2 ↗ e
Corrolaire	Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ et que $\boldsymbol{f(a)f(b) < 0}$ ($f(a)$ et $f(b)$ sont tous les deux différents de 0 mais de signe opposé) alors l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet une unique solution dans $[a, b]$	
Remarque	Un tableau de variations suffit pour montrer la continuité et la stricte monotonie de la fonction. Il faut néanmoins lister ces arguments dans la rédaction de la démonstration.	
Généralisation	On généralise ce théorème à l'intervalle ouvert $I =]a; b[$ où a et b peuvent être réels, ou $\pm\infty$ k doit alors être compris entre $\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x)$	

Exemples	$I = [a; +\infty[;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$I = [a; b[\,; \lim_{x\to b} f(x) = \ell$	$I = [-\infty; b[\,; \lim_{x\to b} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

			
	Pour tout réel k tel que $k \geq f(a)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; +\infty[$	Pour tout réel k dans $[f(a), \ell\,[$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b[$	Pour tout réel k dans $]-\infty, \ell\,[$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty; b[$