Continuité et suites.

Image d'une suite par une fonction		
Définition	Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$. f est une fonction définie sur un intervalle I contenant tous les termes u_n. L'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite $(f(u_n))$	$\mathbb{N} \xrightarrow{(u_n)} \mathrm{I} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $n \longmapsto u_n \longmapsto f(u_n)$
Exemple	Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$ et f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Pour tout entier naturel $n, 2n + 1 \geq 0$ donc l'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $f(u_n) = \sqrt{2n + 1}$	

Image d'une suite convergente par une fonction	
Propriété (admise)	Soit (u_n) une suite qui converge vers un nombre réel ℓ. I est un intervalle tel que $\ell \in$ I et pour tout entier naturel n, $u_n \in I$ Pour toute fonction f définie sur un intervalle I et continue en ℓ, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$
Exemple	Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)$. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$. Soit f la fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$. Pour tout $n \geq 1$ $u_n \in \mathbb{R}$ donc $v_n = f(u_n)$. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(0) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$	
Propriété	Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I, f(x) \in I$ Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in I$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de I alors $\ell = f(\ell)$ ℓ est solution dans I de l'équation $f(x) = x$
Preuve	
Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ d'après la propriété précédente. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ nous en déduisons que $\ell = f(\ell)$	
Exemple	Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ • Cette suite est du type $u_{n+1} = f(u_n)$. En effet posons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{3x + 4}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+, 3x + 4 \in \mathbb{R}^+$ et $\sqrt{3x + 4} \in \mathbb{R}^+$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ $f(x) \in \mathbb{R}^+$ • f est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme composée de fonction continue. Nous admettons ici que la suite (u_n) converge vers un réel l. Nous avons alors d'après la propriété précédente : $l = f(l) \rightarrow l = \sqrt{3l + 4}$ Il s'agit donc de résoudre cette équation pour trouver l $l = \sqrt{3l + 4} \rightarrow l^2 = 3l + 4 \rightarrow l^2 - 3l - 4 = 0$ $\Delta = 3^2 - 4 * (-4) = 9 + 16 = 25$ $l_1 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4\ ;\ l_2 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2} = \frac{3 - 5}{2} = -1$ La 2ème solution n'est pas crédible. En effet $-1 \notin \mathbb{R}^+$ donc $l = 0$. La suite (u_n) converge vers 0.