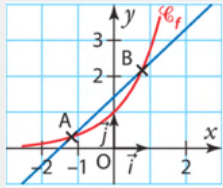
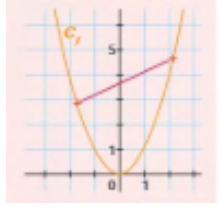
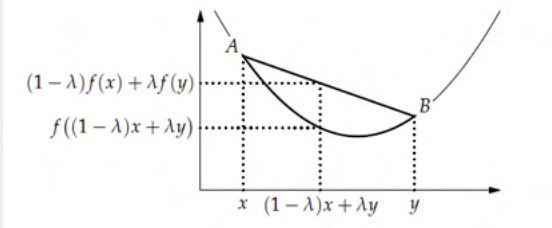
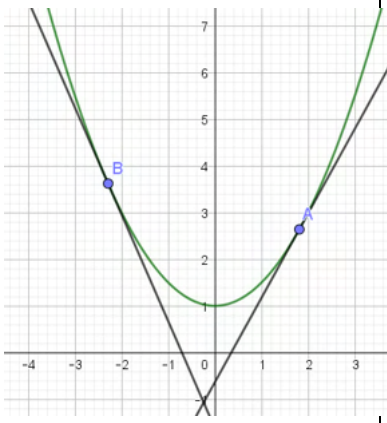
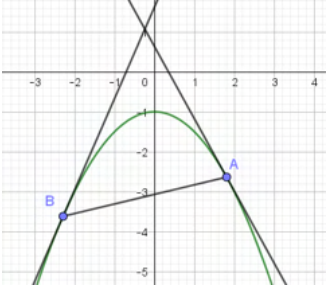
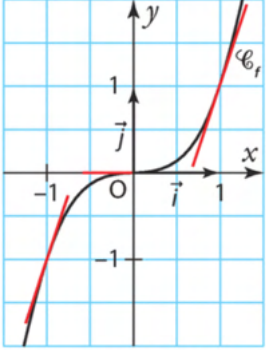


## Convexité.

### Dérivation seconde-Convexité

<b>Définition</b>	<b>Sécante</b>	<p>Soit <math>f</math> une fonction définie sur un intervalle <math>I</math> et <math>C_f</math> sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Soient <math>A</math> et <math>B</math> deux points de <math>C_f</math> alors la droite <math>(AB)</math> est appelée sécante de <math>C_f</math></p>	
<b>Définition</b>	<b>Convexité</b>	<p>On dit que <math>f</math> est convexe sur un intervalle <math>I</math> lorsque sa courbe représentative est située en dessous de ses sécantes entre les deux points d'intersection.</p>	
<b>Exemple</b>	<p>La fonction carré dont le graphe est représenté ci-contre est une fonction convexe sur <math>\mathbb{R}</math></p>		
<b>Propriété</b>	<p>On dit que <math>f</math> est convexe sur un intervalle <math>I</math> lorsque :</p> $\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0; 1]$ $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$		
<b>Démonstration.</b>			
<p>Soient <math>A(x, f(x))</math> et <math>B(y, f(y))</math> deux points. Ces deux points sont bien sur sur la courbe représentative de la courbe de la fonction <math>f</math>. La droite <math>(AB)</math> est donc une corde pour cette courbe. Déterminons une équation de cette courbe. Son équation réduite est <math>Y = mX + p</math>. Son coefficient directeur <math>m</math> vaut <math>m = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}</math></p> <p>Si <math>X = x</math> alors <math>Y = f(x)</math> car cette droite passe par <math>A(x, f(x))</math>. Nous avons donc <math>f(x) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} * x + p \Rightarrow</math></p> $(y - x)f(x) = xf(y) - xf(x) + (y - x)p \Rightarrow (y - x)p = yf(x) - xf(x) + xf(x) - xf(y) \Rightarrow p = \frac{yf(x) - xf(y)}{y - x}$ <p>Donc <math>(AB)</math> a pour équation <math>Y = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} * X + \frac{yf(x)-xf(y)}{y-x}</math></p> <p>Soit <math>\lambda \in [0; 1]</math>, remarquons que <math>x \leq (1 - \lambda)x + \lambda y \leq y</math>.          En effet <math>(1 - \lambda)x + \lambda y - x = -\lambda x + \lambda y = \lambda(y - x)</math> et <math>\lambda(y - x) \geq 0</math>  <math>(1 - \lambda)x + \lambda y - y = (1 - \lambda)x - y(1 - \lambda) = (1 - \lambda)(x - y)</math> et <math>(1 - \lambda)(x - y) \leq 0</math>          Donc l'abscisse <math>(1 - \lambda)x + \lambda y</math> se situe entre l'abscisse <math>x</math> et l'abscisse <math>y</math></p> <p>Le point de la courbe d'abscisse <math>(1 - \lambda)x + \lambda y</math> a pour ordonnée <math>f((1 - \lambda)x + \lambda y)</math></p> <p>Le point de la corde <math>(AB)</math> d'abscisse <math>(1 - \lambda)x + \lambda y</math> a pour ordonnée <math>\frac{f(y)-f(x)}{y-x} [(1 - \lambda)x + \lambda y] + \frac{yf(x)-xf(y)}{y-x}</math></p> $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} [(1 - \lambda)x + \lambda y] + \frac{yf(x) - xf(y)}{y - x} = \frac{yf(x) - xf(y) + (1 - \lambda)xf(y) - (1 - \lambda)xf(x) + \lambda yf(y) - \lambda yf(x)}{y - x}$ $= \frac{f(x)[y - (1 - \lambda)x - \lambda y] + f(y)[-x + x(1 - \lambda) + \lambda y]}{y - x} = \frac{(1 - \lambda)f(x)[y - x] + \lambda f(y)[y - x]}{y - x} = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$ <p>Nous en déduisons donc que la propriété : Entre les points <math>A</math> et <math>B</math> la courbe est au dessous de ses cordes se traduit par <math>f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)</math></p>			
<b>Définition</b>	<b>Dérivation seconde</b>	<p>Soit <math>f</math> une fonction dérivable sur un intervalle <math>I</math>. On note <math>f'</math> sa dérivée. Lorsque <math>f'</math> est dérivable sur <math>I</math> on note <math>f''</math> sa dérivée et on l'appelle dérivée seconde.</p>	

<b>Exemple</b>	<p>Soit <math>f</math> la fonction définie et dérivable sur <math>\mathbb{R}</math> par <math>f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 4</math>  <math>f'(x) = 3x^2 - 6 * 2x + 3 = 3x^2 - 12x + 3</math>  <math>f'</math> est définie et dérivable sur <math>\mathbb{R}</math>. <math>f''(x) = 3 * 2x - 12 = 6x - 12</math></p>	
<b>Propriété</b>	<p>Soit <math>f</math> une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle <math>I</math>. Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> est convexe sur <math>I</math></li> <li>• La courbe représentative de <math>f</math> est située au dessus de ses tangentes.</li> <li>• <math>f'</math> est croissante sur <math>I</math></li> <li>• <math>f''</math> est positive sur <math>I</math></li> </ul>	
<b>Exemple</b>	<p>Voici ci-contre la courbe représentative de la fonction <math>f: x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 + 1</math>.  Sont représentées deux tangentes en deux points quelconques de <math>\mathbb{R}</math>.  La courbe est située au dessus de ces tangentes et de n'importe quelle autre tangente.  <math>f'(x) = \frac{1}{2} * 2x = x</math>; <math>f'</math> est donc croissante sur <math>\mathbb{R}</math>.  Nous en avons la confirmation avec <math>f''(x) = 1</math> et donc <math>f''(x) &gt; 0</math> pour tout <math>x</math> réel.</p>	
<b>Démonstration</b>		
<p>Nous allons démontrer que si <math>f''</math> est positive sur <math>I</math> alors <math>f</math> est au dessus de ses tangentes.  Nous savons que l'équation de la tangente à <math>C_f</math> au point d'abscisse <math>a</math> a pour équation <math>y = f'(a)(x - a) + f(a)</math>  Construisons la fonction <math>\varphi(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)</math>. (<math>f</math> - l'équation de la tangente)  Nous allons étudier son signe. <math>\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)</math>; <math>\varphi''(x) = f''(x)</math>;  Par hypothèse pour tout <math>x</math> de <math>I</math>, <math>f''(x) &gt; 0</math> donc <math>\varphi''(x) &gt; 0</math> donc <math>\varphi'</math> strictement croissante. <math>\varphi'(a) = f'(a) - f'(a) = 0</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pour <math>x &gt; a</math> <math>\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)</math>. <math>\varphi'</math> est croissante, <math>\varphi'(a) = 0</math> donc <math>\varphi'(x) \geq 0</math></li> <li>• Pour <math>x &lt; a</math> <math>\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)</math>. <math>\varphi'</math> est croissante, <math>\varphi'(a) = 0</math> donc <math>\varphi'(x) \leq 0</math></li> </ul> <p><math>\varphi</math> est donc décroissante sur <math>]-\infty; a] \cap I</math> et croissante sur <math>I \cap [a; +\infty[</math>. <math>\varphi</math> admet donc un minimum en <math>x = a</math>  Pour tout <math>x</math> de <math>I</math>, <math>\varphi(x) \geq \varphi(a)</math> or <math>\varphi(a) = f(a) - f'(a)(a - a) - f(a) = 0</math> donc Pour tout <math>x</math> de <math>I</math>, <math>\varphi(x) \geq 0</math> donc  <math>f(x) - f'(a)(x - a) - f(a) \geq 0</math> donc <math>f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)</math>. La courbe de <math>f</math> est située au dessus de ses tangentes.</p>		
<b>Définition</b>	<b>Concavité</b>	On dit qu'une fonction $f$ est concave sur un intervalle $I$ lorsque la fonction $-f$ est convexe.
<b>Remarque</b>	<p>Les propriétés de concavité se déduisent donc des propriétés de convexité. Les six propositions suivantes sont équivalentes :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> est concave sur <math>I</math></li> <li>• La courbe représentative de <math>f</math> est située au dessus de ses cordes</li> <li>• La courbe représentative de <math>f</math> est située au dessous de ses tangentes</li> <li>• <math>f'</math> est décroissante sur <math>I</math></li> <li>• <math>f''</math> est négative sur <math>I</math></li> </ul>	

<p><b>Exemple</b></p>	<p>Voici ci-contre la courbe représentative de la fonction <math>f: x \rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 1</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La courbe est au dessus de des tangentes, de ses sécantes.</li> <li>• <math>f'(x) = -x</math> ; <math>f'</math> est décroissante en effet <math>f''(x) = -1</math> (<math>f''(x) &lt; 0</math>)</li> </ul>		
<p><b>Définition</b></p>	<p><b>Point d'inflexion</b></p>	<p>Un point d'inflexion est un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente.</p>	
<p><b>Exemple</b></p>	<p>La fonction <math>x \rightarrow x^3</math> admet au point (0 ;0) un point d'inflexion. En effet sa courbe traverse au point d'abscisse 0 sa tangente d'équation <math>y = 0</math>. En revanche les tangentes en -1 et 1 ne traversent pas la courbe, les points de coordonnées (1 ;1) et (-1 ;-1) ne sont donc pas des points d'inflexion.</p>		
<p><b>Remarque</b></p>	<p>Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet un point d'inflexion, la fonction change de convexité en ce point : une fonction convexe devient concave et inversement.</p>		
<p><b>Propriété</b></p>	<p>Soit <math>f</math> une fonction deux fois dérivable sur un intervalle <math>I</math>, la courbe représentative de <math>f</math> admet un point d'inflexion en <math>x = a</math> si et seulement si <math>f''</math> s'annule en changeant de signe en <math>x = a</math></p>		
<p><b>Exemple</b></p>	<p>Soit <math>f(x) = x^3</math> définie sur <math>\mathbb{R}</math>. <math>f'(x) = 3x^2</math>; <math>f''(x) = 6x</math>  <math>f''</math> s'annule bien en changeant de signe en <math>x = 0</math>. 0 est bien un point d'inflexion pour la fonction cube.</p>		