

Repère et coordonnées

Définition	Un repère de l'espace noté $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est formé d'un point O et d'une base de vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.
Propriété	Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace il existe un triplet unique de réels (x, y, z) tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. (x, y, z) est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. x est l'abscisse du point M, y son ordonnée, z sa cote.
Propriété	Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. On considère les points $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$. Les coordonnées du vecteur \vec{AB} sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
Exemple	$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}; \vec{AB} \begin{pmatrix} 5-2 \\ 1-1 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Démonstration

$$\vec{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}$$

$$\vec{OB} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}$$

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = -x_A \vec{i} - y_A \vec{j} - z_A \vec{k} + x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

Propriété	Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. On considère les points $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$. Les coordonnées du point I milieu de \vec{AB} sont $\begin{pmatrix} \frac{x_B + x_A}{2} \\ \frac{y_B + y_A}{2} \\ \frac{z_B + z_A}{2} \end{pmatrix}$.
------------------	--

Exemple	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}; I \begin{pmatrix} \frac{5+2}{2} \\ \frac{1+1}{2} \\ \frac{6+4}{2} \end{pmatrix}; I \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{2}{2} \\ \frac{10}{2} \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
----------------	---

Démonstration

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = 2\vec{AI} \begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \\ z_I - z_A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_B - x_A = 2(x_I - x_A) \\ y_B - y_A = 2(y_I - y_A) \\ z_B - z_A = 2(z_I - z_A) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B - x_A = 2x_I - 2x_A \\ y_B - y_A = 2y_I - 2y_A \\ z_B - z_A = 2z_I - 2z_A \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_B - x_A + 2x_A = 2x_I \\ y_B - y_A + 2y_A = 2y_I \\ z_B - z_A + 2z_A = 2z_I \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B + x_A = 2x_I \\ y_B + y_A = 2y_I \\ z_B + z_A = 2z_I \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x_B + x_A}{2} = x_I \\ \frac{y_B + y_A}{2} = y_I \\ \frac{z_B + z_A}{2} = z_I \end{cases}$$

Propriété	Représentation paramétrique d'une droite	Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, la droite passant par le point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$ où k est un nombre réel.
------------------	---	--

<p>Exemple</p>	<p>Soit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Le point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} si et seulement si \overrightarrow{AM} colinéaire à \vec{u} c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$</p> $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = k\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -k \\ y-2 = 2k \\ z-3 = 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 + 2k \\ z = 3 + 5k \end{cases}$	
Démonstration		
<p>Le point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à la droite passant par $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} = k\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-x_A = ka \\ y-y_A = kb \\ z-z_A = kc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$</p>		
<p>Remarque</p>	<p>La représentation paramétrique d'une droite n'est pas unique. En effet on peut prendre un vecteur colinéaire à \vec{u} comme vecteur directeur et un autre point de la droite que le point A comme point de départ</p>	
<p>Propriété</p>	<p>Représentation paramétrique d'un plan</p>	<p>Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, le plan passant par le point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ admet comme représentation paramétrique :</p> $\begin{cases} x = x_A + ka + ta' \\ y = y_A + kb + tb' \\ z = z_A + kc + tc' \end{cases}$
<p>Exemple</p>	<p>Soit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; Le point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient au plan passant par le point A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v}, si et seulement si \overrightarrow{AM}, \vec{u} et \vec{v} sont coplanaires. c'est-à-dire si et seulement si il existe deux réel k et t tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + t\vec{v}$</p> $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = k\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -k+2t \\ y-2 = 2k+2t \\ z-3 = 5k+4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k + 2t \\ y = 2 + 2k + 2t \\ z = 3 + 5k + 4t \end{cases}$	
Démonstration		
<p>\overrightarrow{AM}, \vec{u} et \vec{v} sont coplanaires si et seulement si il existe deux réel k et t tel que $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} = k\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$</p> $\begin{cases} x-x_A = ka + ta' \\ y-y_A = kb + tb' \\ z-z_A = kc + tc' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ka + ta' \\ y = y_A + kb + tb' \\ z = z_A + kc + tc' \end{cases}$		
<p>Remarque</p>	<p>Là encore la représentation paramétrique d'un plan n'est pas unique. En effet il suffit de prendre 2 autres vecteurs que \vec{u} et \vec{v} appartenant à ce plan comme vecteurs directeurs et un autre point du plan comme point de départ.</p>	