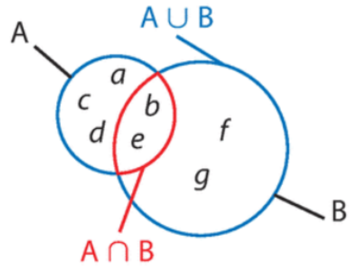
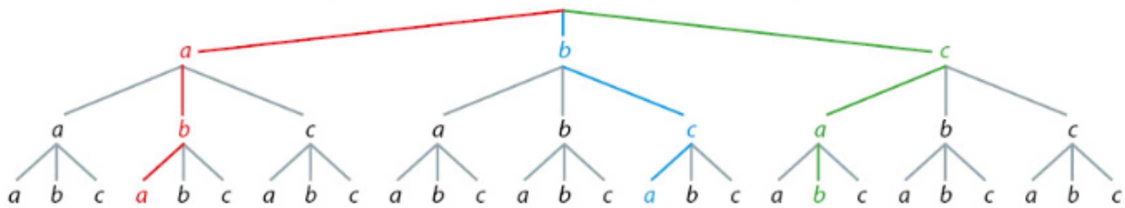
<table>
<tr><th colspan="3">Ensembles et sous ensembles</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="2">Un ensemble fini est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments.</td></tr>
<tr><td>Définition et Notation</td><td colspan="2">On appelle partie d'un ensemble $E$ un ensemble $F$ tel que tous les éléments de F appartiennent aussi à E. On dit que F est inclus dans E et on note $F \subset E$ ( On dit aussi que F est un sous ensemble de E).<br>La réunion $A \cup B$ de deux ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des éléments appartenant à $A$ ou à $B$<br>La réunion $A \cap B$ de deux ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des éléments appartenant à $A$ ou à $B$</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td>Sur l'exemple ci-contre $(*)$:<br>$A = \{a; b; c; d; e\}$ $B = \{b\,; e\,; f\,; g\}$<br>$A \cup B = \{\, a; b; c; d; e; f; g\}$ $A \cap B = \{\, b; e\}$<br>L'ensemble $\{a; b\} \subset\ A$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Définition</td><td>Partie</td><td>Une partie à 1 élément d'un ensemble s'appelle un singleton, une partie à 2 éléments une paire. L'ensemble ℜE) est l'ensemble de toutes les parties de E. c'est-à-dire de tous les sous-ensembles possibles de E. Lorsque l'on caractérise une partie, l'ordre des éléments dans cette partie importe peu.</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="2">L'ensemble des parties de $E = \{a, b, c\}$ est ℜE)= $\{\emptyset; \{a\};\ \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\}$</td></tr>
<tr><td>Définition</td><td>k-uplet</td><td>Soit E un ensemble fini à n élements. Soit k un entier naturel non nul. Un k-uplet d'élements de E est une liste ordonnée de k élements de E distincts ou confondus.<br>L'ensemble de tous les k-uplets de E est l'ensemble E x E …. E (k fois). On le note $E^k$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Exemple</td><td colspan="2">Soit $E = \{a, b, c\}$. L'arbre ci-dessous permet de lister tous les 3-uplets (ou triplets) de E. Ce sont des éléments de $E^3$. $(a, b, a)$ ; $(b, c, a)$ ; $(c, a, b)$ sont 3 triplets parmi l'ensemble des triplets de $E^3$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

| Propriété | Nombre de parties d'un ensemble | $n$ désigne un entier naturel. Un ensemble fini E à $n$ élements possède $2^n$ parties, c'est-à-dire $card\,\mathcal{P}(E) = 2^n$ |
|---|---|---|

**Démonstration**

| Démonstration par récurrence. | Démonstration directe avec les **n-uplets** |
|---|---|

**Démonstration par récurrence.**

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $P(n)$ est : « Un ensemble à n éléments possède $2^n$ parties »

Intialisation : $P(0)$ « Un ensemble à 0 éléments possède $2^0$ parties soit 1 partie ». C'est vrai en effet un ensemble à 0 élements se résume à l'ensemble vide : Ø. Il possède donc 1 partie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n+1)$

Considérons un ensemble à $n+1$ éléments $\{x_1, x_2 \dots x_n, x_{n+1}\}$ et comptons ses parties.

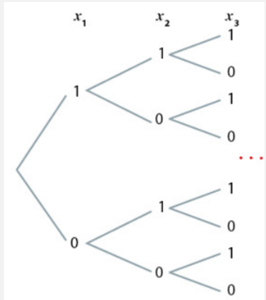
Parmi les parties de cet ensemble certaines ne contiennent pas $x_{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence il y en a $2^n$. Il suffit de rajouter $x_{n+1}$ à toutes les parties ne comportant pas $x_{n+1}$ pour connaître le nombre de parties comprtant $x_{n+1}$. Il y a donc $2^n$ parties qui comportent $x_{n+1}$. Il y a en tout $2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$ parties. $P(n+1)$ est vérifée.

Conclusion : Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, un ensemble à n éléments possède $2^n$ parties

**Démonstration directe avec les n-uplets**

Considérons les $\{x_1, x_2 \dots x_n\}$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments E. Pour chaque partie de cet ensemble il est possible d'associer soit un 1 à chaque $x_i$ (dans le cas où $x_i$ appartient à cette partie) soit un zero (dans le cas contraire). Toutes les parties peuvent donc être identifiées par un suite de 0 et de 1. Combien y-a-t-il de combinaisons ? Représentons les sous forme d'un arbre.

A chaque partie de E correspond un unique $n$-uplet de $\{0; 1\}$. Par exemple le $n$-uplet $(1; 0; 1; 0 \dots . 0)$ correspond à la partie $\{x_1; x_3\}$. Il y a donc autant de parties de E que de $n$-uplet de $\{0; 1\}$. Il y en a $2^n$



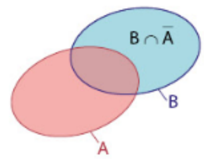

**Principe additif**

| Propriété | Soient $A$ et $B$ sont deux parties d'un ensemble fini E consitutées respectivement de m et de n élements. Nous noterons $card(A)$ (lire : « cardinal de A » le nombre d'élements de A) | |
|---|---|---|
| | Si $A$ et $B$ sont disjointes. ($A \cap B = \emptyset$) | Si A et B ne sont pas disjointes (cas général) $A \cap B \neq \emptyset$ |
| | $card\ (A \cup B)$ =m+n | $card\ (A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$ |
| Exemple | Reprenons l'exemple (*) ci-dessus. $A = \{a; b; c; d; e\}$ $B = \{b\ ; e\ ; f\ ; g\}$<br>$card\ (A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B) = 5 + 4 - 2 = 7$ | |

**Démonstration (du cas général)**

En effet $A \cup B$ est la réunion des ensembles disjoints $A$ et $B \cap \bar{A}$

Ainsi $card(A \cup B) = card(A) + card\ (B \cap \bar{A}) = card(A) + card(B) - card\ (A \cap B)$




**Principe multiplicatif**

| Définition | Le produit cartésien de deux ensembles E et F noté E x F est l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x$ est un élément de E et $y$ un élément de F. |
|---|---|
| Exemple | $E = \{a; b\}$ $et$ $F = \{1; 2; 3\}$ alors<br>E x F = {(a ;1) ; (a ;2) ; (a ;3) ; (b ;1) ; (b ;2) ; (b;3)}<br>On peut représenter cela grâce au tableau croisé ci-contre ou à un arbre. |
| Propriété | Si E et F sont deux ensembles finis constitués respectivement de m et de n éléments alors E x F est un ensemble fini dont le nombre d'éléments est le produit **mn**. (En effet un tableau avec n lignes et m colonnes contient mn cases, $card(\text{E x F}) = card\ \text{E x}\ card\ \text{F}$ (vérifiez-le avec l'exemple ci-dessus) |

| E \ F | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $a$ | $(a;1)$ | $(a;2)$ | $(a;3)$ |
| $b$ | $(b;1)$ | $(b;2)$ | $(b;3)$ |

| Propriété | $k$ est un entier naturel, $k \geq 1$ et $E$ un ensemble fini à $n$ éléments ($n \in \mathbb{N}$)<br>Le nombre de $k$-uplets de $E$ est $n^k$. C'est-à-dire $card(E^k) = n^k$ |
|---|---|

**Démonstration**

On démontre par récurrence que pour tout $k$ entier et $k \geq 1$, la propriété $P(k)$: $card(E^k) = n^k$ est vraie.

**Initialisation : k=1** $card(E^k) = card(E^1) = card(E) = n = n^1$. L'initialisation est vérifiée.

**Hérédité :** Supposons que la propriété $P(k)$ soit vraie au rang $k$, montrons qu'elle est aussi vraie au rang $k+1$

$card(E^{k+1}) = card\ (E^k \text{x} E) = \ card\ (E^k) \text{x} card(E)$ (principe multiplicatif)

D'après l'hypothèse de récurrence vérifiée au rang $k$ , $card\ (E^k) = n^k$ donc $card(E^{k+1}) = n^k \text{x} n = n^{k+1}$

La propriété $P(k+1)$ est aussi vérifiée. donc pour tout $k$ entier et $k \geq 1$ $card(E^k) = n^k$