

Dénombrement

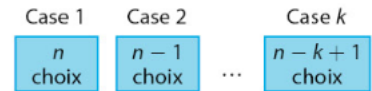
k-uplets d'éléments distincts, permutation

Propriété Le nombre de k -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est $n(n-1) \dots (n-k+1)$ (*)

Démonstration

Je dois choisir comment constituer un k -uplet d'éléments distincts parmi les n éléments d'un ensemble E . Choisir un k -uplet revient à remplir k cases avec des éléments distincts de E .

- Il y a n choix pour la 1^{ère} case
 - Un choix étant fait, il y a $n-1$ choix possibles pour la 2^{ème} case. Il y a donc $n(n-1)$ choix pour remplir les cases 1 et 2.
 - Ainsi de suite : les cases 1,2, ... $k-1$ étant complétées, il reste $n-(k-1)$ choix possibles pour le cas k soit $n-k+1$ choix
- Le nombre de k -uplets est donc $n(n-1) \dots (n-k+1)$



Exemple Le nombre de 5-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 8 éléments est égal à $8 * 7 * 6 * 5 * 4 = 6720$ (**)

Définition Soit E un ensemble fini à n éléments. Une permutation des éléments de E est un n -uplet d'éléments distincts de E .

Exemple Une permutation de l'ensemble $E \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ est $\{ 1 ; 6 ; 5 ; 3 ; 4 ; 2 \}$

Définition Le nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments est égal à $n * (n-1) * \dots * 2 * 1 = n!$ (C'est aussi le nombre de n -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments). On note ce nombre $n!$ et on lit « **factorielle n** ». (C'est une conséquence directe de la propriété (**))

Exemple Le nombre de permutations de l'ensemble E ci-dessus est égal à $6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$

Remarque Lister toutes les permutations d'un ensemble E , c'est écrire tous les éléments de E dans tous les ordres possibles. Par convention $0! = 1$

Propriété Le nombre de k -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments s'écrit aussi $\frac{n!}{(n-k)!}$

Preuve

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1 * 2 * 3 * \dots * n}{1 * 2 * 3 * \dots * (n-k)} = n(n-1) \dots (n-k+1)$$

Exemple Le nombre de 5-uplets distincts d'un ensemble à 8 éléments est égal à $\frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{1*2*3*...*8}{1*2*3} = 4 * 5 * 6 * 7 * 8 = 6720$. Nous retrouvons le résultat de l'exemple (**)