Dénombrement

Combinaisons

Définition	Soit E un ensemble à n éléments (avec $n \in \mathbb{N}$) et k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$ Une combinaison de k éléments de l'ensemble E est une **partie** (ou sous ensemble) de k éléments de E. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi les n éléments de E est noté $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$ **(« Lire $\boldsymbol{k}$ parmi $\boldsymbol{n}$ »)**
Remarque	L'ordre n'intervient pas dans les combinaisons. Exemple $\{a; b\} = \{b; a\}$ et il n'y a pas de répétition possible, tous les élements sont distincts : $\{a; a\} = \{a\}$
Exemple	$\{2\ ; 3\}$ est une partie de l'ensemble $\{1\ ; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$
Cas particuliers	• $\boldsymbol{\binom{n}{n} = 1}$. Il n'y a qu'une seule partie à n éléments dans un ensemble à n élements. C'est l'ensemble E lui-même. • $\boldsymbol{\binom{n}{0} = 1}$. Il n'y a qu'une seule partie à 0 éléments. C'est l'ensemble vide. • $\boldsymbol{\binom{n}{1} = n}$. Un ensemble à n élements possède n parties à 1 éléments.
Propriété	Pour tous entiers naturels n et k : Si $0 \leq k \leq n$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Soit $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ Si $1 \leq k \leq n$

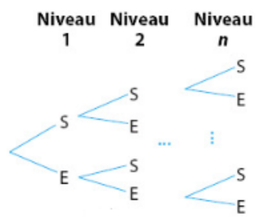
Démonstration (admise)

Le nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est égal à $\frac{n!}{(n-k)!}$.
Or une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments peut se présenter dans $k!$ ordres distincts. (Le nombre de permutations d'un ensemble à k éléments)
Nous en déduisons que pour une partie à k éléments il y a $k!$ k-uplets d'éléments distincts.
Le nombre de parties $\binom{n}{k}$ est donc égal à $\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Illustration

Imaginons une expérience aléatoire qui ne puissent donner que deux résultats : Succès S ou échec E. (du type « pile ou face »). On répète n fois cette expérience. (Chaque nouvelle session est indépendante des autres). On peut représenter les différents résultats de cette expérience globale à l'aide de l'arbre ci-contre. Un chemin sur cet arbre peut être représenté par une succession de n case où l'on inscrit S ou E.

Le nombre de chemins avec k succès $(0 \leq k \leq n)$ est le nombre de choix de k cases parmi n où l'on inscrit la lettre S. Ces choix sont les combinaisons de k positions parmi n (pas de répétition et pas d'ordre).
Dans un arbre « succès échec » à $\boldsymbol{n}$ niveaux le nombre de chemins avec $\boldsymbol{k}$ succès est $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$



Propriété

Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Démonstration

- $1^{\text{ère}}$ méthode : Dans un arbre « succès échec » à n étapes le nombre de chemins avec k succès est égal au nombre de chemins avec k échecs soit $n-k$ succès.

- $2^{\text{ème}}$ méthode :
$$\binom{n}{n-k} = \frac{(n-k)!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} =. \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Propriété	**Relation de Pascal**	Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k \leq n-1$ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Démonstration

- $1^{\text{ère}}$ méthode
$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!\,(k-1)!}$$
$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}$$
$$= \frac{(n-1)!\,(n-k)}{(n-k)!\,k!} + \frac{k(n-1)!}{(n-k)!\,k!}$$
$$= \frac{(n-1)!\,(n-k+k)}{(n-k)!\,k!} = \frac{(n-1)!\,(n)}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

- $2^{\text{ème}}$ méthode :
Dans un arbre « succès-échec » à n étapes, je m'intéresse aux chemins comportant k succès. Il y en a $\binom{n}{k}$.
Parmi ceux-ci certains commencent par un succès. Pour savoir combien il y en a je compte le nombre de chemins ayant $k-1$ succès parmi $n-1$ étapes. Soit $\binom{n-1}{k-1}$
Parmi ceux-ci les autres commencent par un échec. Pour savoir combien il y en a je compte le nombre de chemins ayant k succès parmi $n-1$ étapes. Soit $\binom{n-1}{k}$
J'ai bien : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Exemple
$$\binom{7}{5} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4} = \binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 6 + \frac{6!}{(6-2)!\,2!} = 6 + \frac{6!}{4!\,2!} = 6 + \frac{5*6}{2} = 6 + 15 = 21$$

Propriété — **Triangle de Pascal**

On peut calculer les $\binom{n}{k}$ de proche en proche à l'aide du tableau ci-contre. Pour cela :

- On convient que $\binom{0}{0} = 1$
- On place des 1 sur la « colonne $k = 0$» car pour tout n, $\binom{n}{0} = 1$
- On place des 1 sur la diagonale car pour tout n, $\binom{n}{n} = 1$
- On obtient un autre nombre du tableau en additionnant le nombre juste au dessus avec celui situé à gauche sur la ligne précédente, illustrant ainsi la relation de Pascal
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Propriété
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n.$$

Preuve

Preuve : Nous avons déjà montré précédemment que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments était 2^n.
Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments peut aussi s'écrire comme
la somme du nombre de parties à 0 éléments + la somme du nombre de parties à 1 éléments + la somme du nombre de parties à 2 éléments + …. Donc $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n$.