Equations différentielles.

Résolution d'équations différentielles.

Théorème

1. Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ avec a réel non nul ont pour solution les fonctions y de la forme $y(x) = Ke^{ax}$ avec K réel
2. Pour tout couple de réels (x_0, y_0) il existe une unique solution y de l'équation $y' = ay$ vérifiant $y(x_0) = y_0$

Démonstration

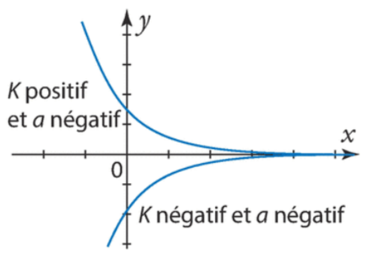
1. Pour démontrer que toutes les solutions y de l'équation différentielle $y' = ay$ ont pour expression $y(x) = Ke^{ax}$ il faut d'abord démontrer que les solutions de la forme $x \to Ke^{ax}$ sont solutions de l'équation. Posons $y(x) = Ke^{ax}$ $y'(x) = Kae^{ax}$, donc $y'(x) = ay(x)$; y est bien solution de l'équation différentielle. Réciproquement si y est une solution montrons qu'elle est de la forme $y(x) = Ke^{ax}$. Soit y une solution. Posons $t(x) = y(x)e^{-ax}$. Il vient $t'(x) = y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = e^{-ax}\big(y'(x) - ay(x)\big) = 0$ donc la fonction t est une constante. Nous notons $t = K$ avec K réel. $t(x) = y(x)e^{-ax} \to y(x) = t(x)e^{ax} = Ke^{ax}$ donc si y est une solution alors $y(x) = Ke^{ax}$. Nous avons démontré que toutes les solutions de l'équation $y' = ay$ étaient de la forme $x \to Ke^{ax}$
2. Toutes les solutions y de l'équation sont de la forme $y(x) = Ke^{ax}$. Lorsque $y(x_0) = y_0$ nous avons $y_0 = Ke^{ax_0}$ donc $K = y_0e^{-ax_0}$. Nous pouvons donc ecrire $y(x) = y_0e^{-ax_0}e^{ax} = y_0e^{a(x-x_0)}$. La solution est déterminée de manière unique.

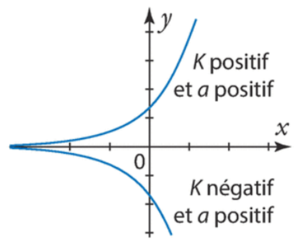
Exemple

Trouvons la solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ vérifiant $y(0) = 2$
Toutes les solutions de cette équation sont de la forme $y(x) = Ke^{3x}$. $y(0) = 2 \to Ke^{3*0} = 2 \to K = 2$
Donc **la solution** de l'équation différentielle $y' = 3y$ est $y(x) = 2e^{3x}$

Remarque

Voici l'allure des courbes des fonctions $x \to Ke^{ax}$ obtenues pour K positif puis pour K négatif et en faisant varier le coefficient a





Théorème

1. Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a est un réel non nul et b un réel ont pour solutions les fonctions $y: x \to Ke^{ax} - \frac{b}{a}$ avec K réel.
2. Pour tout couple de réels (x_0, y_0), il existe une unique fonction y solution pr@enant en x_0 la valeur y_0 c'est-à-dire telle que $y(x_0) = y_0$

Démonstration

1. Montrons d'abord que si $y(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$ alors y est solution de l'équation différentielle.
Si $y(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$ alors $y'^{(x)} = Kae^{ax}$; $ay(x) + b = a\,Ke^{ax} - \frac{ab}{a} + b = Kae^{ax} = y'(x)$ Donc oui y est solution de l'équation différentielle. Réciproquement supposons que y est solution et montrons qu'alors $y(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$.
Tout d'abord remarquons que la fonction $f: x \to -\frac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation. En effet $f'(x) = 0$ et $af(x) + b = a * -\frac{b}{a} + b = 0$. Soit y une solution de l'équation :
$\begin{cases} y' = ay + b \\ f' = af + b \end{cases} \to y' - f' = a(y - f) \to (y - f)' = a\,(y - f)$; La fonction $y - f$ est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$. D'après le 1er théorème nous pouvons donc écrire $y(x) - f(x) = Ke^{ax}$ avec K réel ce qui implique $y(x) = Ke^{ax} + f = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$
2. Soit y une solution alors $y(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$ si $y(x_0) = y_0$ alors $Ke^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0 \to K = e^{-ax_0}(y_0 + \frac{b}{a})$
Donc il existe une unique solution y de la forme $y(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a} = e^{-ax_0}\left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{ax} - \frac{b}{a} = e^{a(x-x_0)}\left(y_0 + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}$

Exemple

Considérons l'équation différentielle $y' = y - 1$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \to 1$ est solution particulière de l'équation. La fonction $y(x) = 1 + Ke^{x}$ est donc la solution générale de l'équation différentielle.

Généralisation	On généralise la méthode de résolution vue précédemment avec les équations du type $y' = ay + f$ avec a nombre réel non nul et f fonction donnée. 1. On cherche une fonction g solution particluière de l'équation $y' = ay + f$ avec 2. Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions de la forme $x \to Ke^{ax}$ 3. Toute solution de l'équation $y' = ay + f$ s'écrira donc $x \to Ke^{ax} + g(x)$