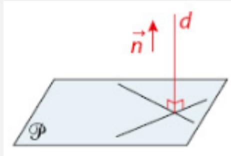
Equation cartésienne d'un plan

Vecteur normal

Définition	**Vecteur normal**	Dire qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ signifie que toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$	
Propriété	Soit un plan $\mathcal{P}$ passant par un point A. Le vecteur $\vec{n}$ est vecteur normal du plan $\mathcal{P}$ si et seulement si pour tout point M de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$		

Démonstration

Si $\vec{n}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$ cela signifie qu'il est orthogonal à toute droite de $\mathcal{P}$. Soit M un point de $\mathcal{P}$. $\overrightarrow{AM}$ est le vecteur directeur de (AM). Donc $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
Réciproquement supposons que pour tout point M de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$. Cela signifie que $\vec{n}$ est orthogonal à toute droite de $\mathcal{P}$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$

Propriété	Soit un plan $\mathcal{P}$ passant par un point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Un vecteur $\vec{n}$ est normal à ce plan ssi $\vec{n}.\vec{u} = \vec{n}.\vec{v} = 0$

Démonstration

$\vec{n}.\vec{u} = \vec{n}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{n}$ est orthogonal aux droites sécantes passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{P} \Leftrightarrow$ $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ (En effet le vecteur directeur de toute droite de $\mathcal{P}$ pourra s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

Exemple	Soit le plan P passant par le point $A(2 \quad 2 \quad -1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal à ce plan. En effet $\vec{n}.\vec{u} = \vec{n}.\vec{v} = 0$

Equation cartésienne d'un plan

Propriété et Définition	Tous les points M$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ du plan P passant par le point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ admettent une relation entre leurs coordonnées du type : $ax + by + cz + d = 0$. Cette relation est appelée **équation cartésienne** du plan P

Démonstration

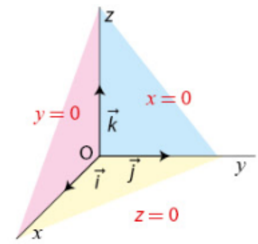
Quelque soit le point M$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ du plan P, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_A\\y - y_A\\z - z_A\end{pmatrix}.\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0$ ce qui équivaut à $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ ou $ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$. En posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$, nous avons bien trouvé une équation du type $ax + by + cz + d = 0$.

Exemple	Donnons de deux manières différentes l'équation cartésienne du plan passant par le point A$\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ • Un point M$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ appartient à ce plan si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-1)\\y-2\\z-3\end{pmatrix}.\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ $2(x+1) + 3(y-2) - (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - z + 2 - 6 + 3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{2x + 3y - z - 1 = 0}$ • Nous savons que l'équation cartésienne de ce plan est de la forme $2x + 3y - z + d = 0$. Or ce plan passe par le point A$\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ donc $2(-1) + 3(2) - 3 + d = 0 \Leftrightarrow 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$. Nous avons bien retrouvé l'équation cartésienne $\mathbf{2x + 3y - z - 1 = 0}$

<table>
<tr>
<td>Cas particuliers</td>
<td>

- Le plan (xOy) a pour équation cartésienne $z = 0$
- Le plan (xOz) a pour équation cartésienne $y = 0$
- Le plan (yOz) a pour équation cartésienne $x = 0$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Démonstration</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Le plan (xOy) passe par le point 0$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est normal à ce plan. L'équation caractéristique du plan est donc : $0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0$ soit $z=0$. Démonstration identique pour (xOz) et (yOz)</td>
</tr>
</table>