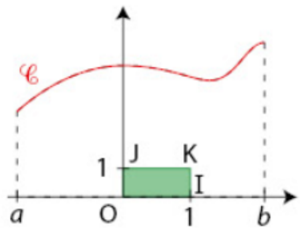
Intégration. Cours

Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J)

Définitions

- **L'unité d'aire** notée $u.a$ est l'aire du rectangle $OIKJ$ où $K(1\,;1)$
- Le domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$ est la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$
- L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire exprimée en $u.a$ du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$. On la note $\int_a^b f(x)dx$



Exemple

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2; 3]$ par :

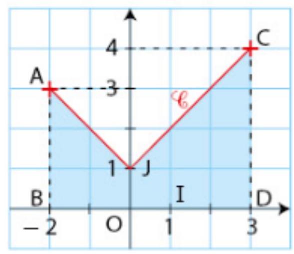
$$f(x) = \begin{cases} -x+1 \text{ si } -2 \leq x \leq 0 \\ x+1 \text{ si } 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

La courbe représentative est représentée ci-contre. Calculons

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx$$

f est continue et positive sur l'intervalle $[-2\,;3]$. Donc désigne l'aire de la zone située sous la courbe, au dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équation $x = -2$ et $x = 3$, soit l'aire de 2 trapèzes.

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \frac{(3+1)}{2} * 2 + \frac{(4+1)}{2} * 3 = 4 + \frac{15}{2} = \frac{8}{2} + \frac{15}{2} = \frac{23}{2}$$



Théorème

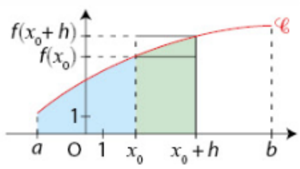
La fonction $F_a : x \to \int_a^x f(t)dt$ est **la primitive** de la fonction f sur l'intervalle [a,b] telle que $F_a(a) = 0$

Démonstration

Nous allons nous intéresser à un x_0 quelconque de l'intervalle [a,b] et nous allons démontrer que :

$$F'_a(x_0) = f(x_0)$$

Supposons que f soit croissante autour de x_0(Nous aurions une démonstration analogue si elle était décroissante)



- Pour un h suffisamment petit et $h > 0$

$$hf(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq\ hf(x_0+h) \to$$

L'aire sous la courbe comprise entre x_0 et $x_0 + h$ est encadrée par l'aire de deux rectangles de longueurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$ et de largeur h

$$hf(x_0) \leq F_a(x_0+h) - F_a(x_0) \leq hf(x_0+h)$$

$$f(x_0) \leq \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \leq\ f(x_0+h)\ (\mathbf{1})$$

- Pour un h suffisamment petit et cette fois $h < 0$ nous avons :

$$|h|f(x_0+h) \leq \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt \leq\ |h|f(x_0)$$

$$\to |h|f(x_0+h) \leq F_a(x_0) - F_a(x_0+h) \leq |h|f(x_0)$$

$$\to f(x_0+h) \leq \frac{F_a(x_0) - F_a(x_0+h)}{|h|} \leq f(x_0)$$

$$\to f(x_0+h) \leq \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \leq f(x_0)\ (\mathbf{2})$$

- Dans les cas $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{2})$ nous avons $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ (f étant continue en x_0), le théorème des gendarmes nous permet donc d'affirmer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} =\ f(x_0)$$

Cela signifie que $F_a'(x_0) =\ f(x_0)$. La fonction F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) =\ f(x_0)$. Nous en déduisons que F_a est **une** primitive de la fonction f sur $[a; b]$. Or $F_a(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$ donc F_a est la primitive de la fonction f s'annulant en a.

Propriété	Soit F une primitive quelconque de la fonction f alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Démonstration

Nous savons que deux primitives ne diffèrent que par une constante. Donc il existe un réel C tel que quel que soit $x \in [a;b]$ $F(x) = F_a(x) + C$.
$F(b) = F_a(b) + C$; $F(a) = F_a(a) + C$; donc $F(b) - F(a) = F_a(b) + C - (F_a(a) + C) = F_a(b) - F_a(a) = F_a(b) = \int_a^b f(x)dx$

Exemple	Soit f la fonction continue, positive, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x^4$ Cette fonction admet comme primitive $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ $\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 0 - 0 = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$