

Intégrale d'une fonction continue et de signe quelconque sur un intervalle

Théorème Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration (admise)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Soit m un minorant de f sur $[a, b]$. (Pour tout x de $[a, b]$ $f(x) \geq m$)
 On pose g la fonction définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - m$. Pour tout x de $[a, b]$ g positive et continue. D'après un théorème vu précédemment la fonction $G : x \rightarrow \int_a^x g(t) dt$ est une primitive de la fonction g sur $[a; b]$
 Posons $F(x) = G(x) + mx$, $F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$. F est donc bien une primitive de f sur $[a; b]$

Définition

Soit f une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle I. Pour a et b deux nombres réels de I, **l'intégrale de a à b de f** est le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I. On la note encore $\int_a^b f(x) dx$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Remarques

- La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie pour la calculer. En effet soit G une autre primitive. Nous avons $G(x) = F(x) + C \rightarrow G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$
- Notation : On écrit $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- Pour tous réels a et b de I, $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
 En effet $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$; $\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b)$; $F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$

Exemple

Calculons $\int_0^2 (e^x - 2x - 1) dx$
 La fonction $x \rightarrow e^x - 2x - 1$ admet comme primitive $x \rightarrow e^x - \frac{2x^2}{2} - x$ soit $x \rightarrow e^x - x^2 - x$

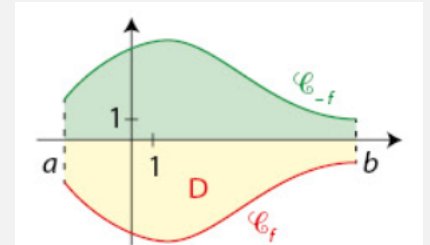
$$\int_0^2 (e^x - 2x - 1) dx = [e^x - x^2 - x]_0^2 = (e^2 - 2^2 - 2) - (e^0 - 0^2 - 0) = e^2 - 7$$

Propriété

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$
 Dans un repère orthogonal on définit le domaine D par la zone située entre la courbe représentative de f , les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses.

Si f est négative sur $[a, b]$ alors l'aire de D est égale à $-\int_a^b f(x) dx$

$$\mathcal{A}(D) = -\int_a^b f(x) dx$$



Démonstration

Pour des raisons de symétrie l'aire de D est aussi celle du domaine située entre la courbe de la fonction $-f$, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses. Donc $\mathcal{A}(D) = \int_a^b -f(x) dx$. Si F est une primitive de f alors $-F$ est une primitive de $-f$. Nous avons donc $\mathcal{A}(D) = \int_a^b -f(x) dx = [-F(x)]_a^b = -F(b) + F(a)$
 Or $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, donc $\mathcal{A}(D) = -\int_a^b f(x) dx$