

Intégration. Cours

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et F et G leurs primitives sur $[a, b]$

Propriété	Linéarité	$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$	Pour tout réel λ , $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
------------------	------------------	---	--

Démonstration

Si f et g ont pour primitives F et G alors $f + g$ a pour primitive $F + G$ et λf a pour primitive λF

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = [F + G]_a^b = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = [\lambda F]_a^b = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda(F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Exemple	$\int_0^1 (x^3 + x^2)dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} + \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$
----------------	---

Propriété	Relation De Chasles	Pour tous réels c, d, e de l'intervalle $[a, b]$ $\int_c^e f(x)dx = \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx$
------------------	----------------------------	---

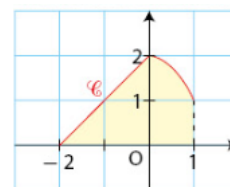
Démonstration

$$\int_c^e f(x)dx = [F]_c^e = F(e) - F(c) = F(e) - F(d) + F(d) - F(c) = \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx$$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Calculons l'aire du domaine D situé sous la courbe \mathcal{C}



Exemple

$$D = \int_{-2}^1 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$

$$\int_{-2}^0 f(x)dx = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ u.a (Aire du demi carré)}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (2 - x^2)dx = \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} - \left(2 \cdot 0 - \frac{0^3}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{6}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$D = \int_{-2}^1 f(x)dx = 2 + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} + \frac{5}{3} = \frac{11}{3} \text{ u.a}$$

Propriété

- Si pour tout réel x de $[a, b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si pour tout réel x de $[a, b]$, $f(x) \leq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

Démonstration

$F'(x) = f(x)$; $f(x) \geq 0 \rightarrow F'(x) \geq 0$ donc F croissante sur $[a, b]$.

$$b \geq a \rightarrow F(b) \geq F(a) \rightarrow F(b) - F(a) \geq 0 \rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Propriété

Si pour tout réel x de $[a, b]$, $f(x) \geq g(x)$ alors $\int_a^b (f - g)(x)dx \geq 0$

Démonstration

$$f(x) \geq g(x) \rightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \rightarrow \int_a^b (f - g)(x)dx \geq 0$$

Exemple

Montrons que $0 \leq \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \frac{(e-1)}{e^2}$

Pour $x \geq 1$, $x^2 \geq x \rightarrow -x^2 \leq -x \rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x} \rightarrow \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \int_1^2 e^{-x} dx \rightarrow \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq [-e^{-x}]_1^2$

$$\rightarrow \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq -e^{-2} + e^{-1} \rightarrow \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \rightarrow \frac{1}{e^2}(e - 1)$$

Définition

La valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ est le nombre réel μ défini par

$$\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx$$