

Intégration par parties

Théorème

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I . On suppose leurs fonctions dérivées f' et g' continues sur I . Alors pour tous réels a et b de I

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Démonstration

Nous savons que pour tout x de I , $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx \rightarrow [f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx \rightarrow$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Exemple

Nous allons calculer $\int_0^1 xe^x dx$. A priori nous ne connaissons pas de primitive à la fonction $x \rightarrow xe^x$

Nous allons donc calculer cette intégrale grâce à l'intégration par parties.

Posons $f'(x) = e^x$ et $g(x) = x$ Nous avons sur \mathbb{R} , $f(x) = e^x$ et $g'(x) = 1$

Les fonctions f et g sont dérivables sur \mathbb{R} et leurs dérivées sont continues.

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 g(x)f'(x)dx = [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x)dx = [e^x x]_0^1 - \int_0^1 1 * e^x dx$$

$$= e * 1 - 1 * 0 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

$$\text{Donc } \int_0^1 xe^x dx = 1$$