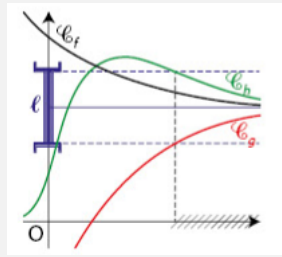


Limites de fonctions

Théorèmes de comparaison. Limite infinie

Propriété	Soient f et g deux fonctions telles que :	<ul style="list-style-type: none"> • pour x assez grand $f(x) \geq g(x)$ (1) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ 	Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
Exemple	Soit $f(x) = x + \sin x $; $ \sin x \geq 0$ quelque soit x donc $f(x) \geq x$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$		
Propriété	Soient f et g deux fonctions telles que :	<ul style="list-style-type: none"> • pour x assez grand $f(x) \leq g(x)$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ 	Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
Exemple	Soit $f(x) = -x + \cos x$; $\cos x \leq 1$ donc $f(x) \leq -x + 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$		
Remarque :	Ces deux propriétés s'étendent aux cas des limites en $-\infty$ ou en un point. Il suffit de changer l'ensemble de validité de la condition (1) . On ne dit alors plus pour x assez grand $f(x) \geq g(x)$ mais pour x assez petit $f(x) \geq g(x)$ ou pour x suffisamment proche de $a \dots$		

Théorème des gendarmes. Limite finie

Propriété	Soient f, g et h trois fonctions et ℓ un nombre réel tel que :	<ul style="list-style-type: none"> • pour x assez grand (1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ 	Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$	
Démonstration (admise)				
Exemple	Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* . $-1 \leq \sin x \leq 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. Donc pour $x > 0$: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$			
Remarque :	Ces deux propriétés s'étendent aux cas des limites en $-\infty$ ou en un point. Il suffit de changer l'ensemble de validité de la condition (1) . On ne dit alors plus pour x assez grand $f(x) \geq g(x)$ mais pour x assez petit $f(x) \geq g(x)$ ou pour x suffisamment proche de $a \dots$			
Remarque :	Ce théorème s'étend aux cas des limites en $-\infty$ ou en un point. Il suffit de changer l'ensemble de validité de la condition (1) . On ne dit alors plus pour x assez grand mais pour x assez petit ou pour x suffisamment proche de $a \dots$			