Limites de fonctions

Limites de la fonction exponentielle.

Lemme : Pour tout réel $x, e^x \geq x+1$

Démonstration

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x - x - 1$. $\varphi'(x) = e^x - 1$. Nous savons que $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ $\varphi(0) = 0$. Nous pouvons donc établir le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$					
$\varphi(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Nous en déduisons que pour tout x réel $\varphi(x) \geq 0 \rightarrow e^x \geq x+1$

Propriété : La fonction exponentielle admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Démonstration

Grace au Lemme c'est une simple application du théorème de comparaison. $\lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$, $e^x \geq x+1$ donc $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Propriété : La fonction exponentielle admet pour limite 0 en $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Démonstration

Nous remarquons que $e^x = e^{--x} = \frac{1}{e^{-x}}$; Donc $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}$; Nous savons que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc d'après les propriétés d'opérations sur les limites $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ d'où $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Croissance comparée de $x \rightarrow x^n$ et de $x \rightarrow e^x$ en $+\infty$

Propriété : Pour tout entier naturel $n \geq 1$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Démonstration

D'après le Lemme ci-dessus $e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1} + 1 \geq \frac{x}{n+1}$. Nous savons que la fonction $x \rightarrow x^{n+1}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ donc nous avons le droit d'élever à la puissance $n+1$ les deux membres de cette inégalité sans en changer le signe. Nous obtenons $\left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow e^{\frac{x(n+1)}{n+1}} \geq \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} x^{n+1} \Leftrightarrow e^x \geq Kx^{n+1}$ (en posant $K = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$)

En divisant par x^n à droite et à gauche il vient $\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{Kx^{n+1}}{x^n} \rightarrow \frac{e^x}{x^n} \geq Kx$

$\lim_{x\to+\infty} Kx = +\infty$ (car $K > 0$) donc d'après le théorème de majoration $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Propriété : Pour tout entier naturel $n \geq 1$ $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$

Démonstration :

Il suffit de remarquer que $x^n e^{-x} = \frac{x^n}{e^x} = \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^n}\right)}$ Donc $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^n}\right)}$ Nous savons que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$

Remarque : On énonce souvent ces résultats à l'aide de la règle opératoire suivante : « En $+\infty$ l'exponentielle l'emporte sur les puissances x^n »