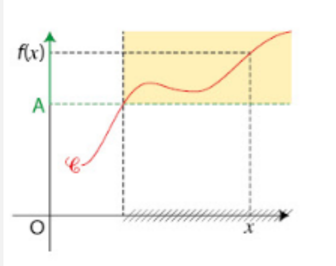
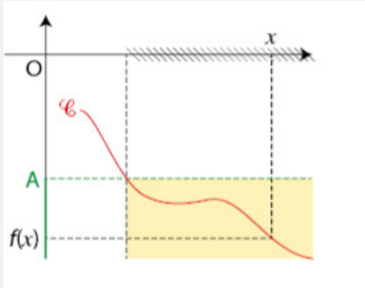
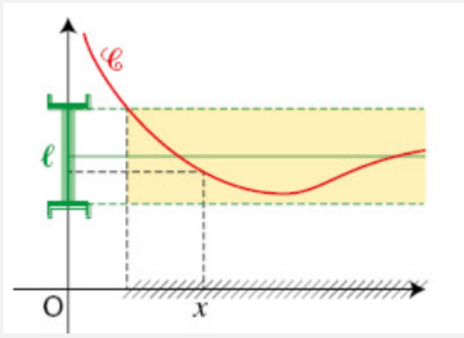
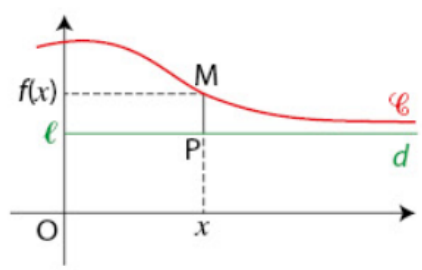
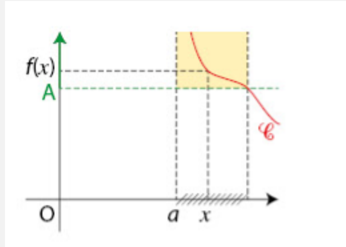
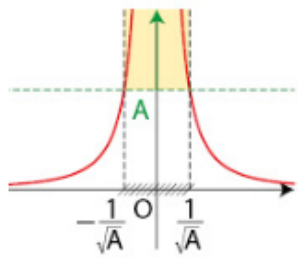
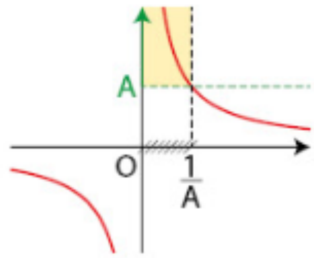
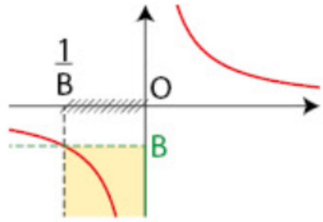
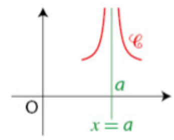
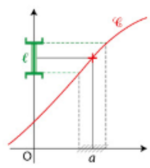
Limites de fonctions

Lorsque $x \to \pm\infty$			
Définition	**Limite $+\infty$ en $+\infty$**	Dire qu'une fonction f admet une limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle $]A;+\infty[$ (Avec A nombre réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	
Exemple	Fonctions de référence admettant une limite $+\infty$ en $+\infty$: $x \to x, x \to x^2, x \to x^3, x \to \sqrt{x}$		
Définition	**Limite $-\infty$ en $+\infty$**	Dire qu'une fonction f admet une limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle $]-\infty;A[$ (Avec A nombre réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	
Exemple	Fonctions de référence admettant une limite $-\infty$ en $+\infty$: $x \to -x, x \to -x^2, x \to -x^3, x \to -\sqrt{x}$		
Remarque	On définit de manière analogue les limites $+\infty$ et $-\infty$ lorsque $x \to -\infty$		
Exemple	• Les fonctions $x \to -x, x \to x^2, x \to -x^3$ admettent toute une limite $+\infty$ en $-\infty$ • Les fonctions $x \to +x, x \to -x^2, x \to x^3$ admettent toute une limite $-\infty$ en $-\infty$		
Définition	**Limite finie en $\pm\infty$**	Dire qu'une fonction f admet une limite ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$	
Exemple	Fonctions de référence admettant une limite 0 en $+\infty$: $x \to \frac{1}{x}$; $x \to \frac{1}{x^2}$ et plus généralement $x \to \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$		
Remarque	On définit de manière analogue une limite réelle lorsque $x \to -\infty$		
Interprétation géométrique	**Limite réelle en $\pm\infty$**	Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ on dit que dans un repère orthonormé, la droite d d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f. Cela signifie que en notant $M(x; f(x))$ un point de $\mathscr{C}$ et $P(x, \ell)$ un point de d, la distance MP tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$	
Remarque	On définit de manière analogue la limite réelle lorsque $x \to -\infty$		

Lorsque $x \to a$			
Préambule	f est une fonction définie sur D (intervalle ou réunion d'intervalles). On étudie la limite de f en un nombre réel a que si $a \in D$ ou si $a \notin D$ mais alors a est une borne d'un intervalle de D. Par exemple on peut étudier la limite en 0 de : . $x \to x^2$ car $D = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$. $x \to \frac{1}{x}$ car $D =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ et 0 est une borne de l'intervalle.		
Définition	**Limite infinie en un point a**	Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle $]A; +\infty[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	
Remarque	On définit de manière analogue une limite $-\infty$ en a.		
Exemple 1	f est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Pour tout réel $A > 0, \frac{1}{x^2} > A$ équivaut à $0 < x^2 < \frac{1}{A}$ soit $-\frac{1}{\sqrt{A}} < x < \frac{1}{\sqrt{A}}$ et $x \neq 0$ Donc $]A; +\infty[$ contient tous les $f(x)$ pour x assez proche de 0. On écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$		
Exemple 2	g est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ • Sur $]0 ; +\infty[$ on se donne un réel $A > 0$. $\frac{1}{x} > A$ équivaut à $0 < x < \frac{1}{A}$. On dit que g admet pour limite $+\infty$ à droite en 0 et on note $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$ • Sur $]-\infty ; 0[$ on se donne un réel $B < 0$. $\frac{1}{x} < B$ équivaut à $\frac{1}{B} < x < 0$. On dit que g admet pour limite $-\infty$ à gauche en 0 et on note $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = -\infty$ Dans cet exemple la limite à droite de g en 0 n'est pas égale à la limite en gauche de g en 0.		
Définition	Lorsqu'une fonction f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en un nombre réel a ont dit que, dans un repère orthonormé, la droite d'équation $\boldsymbol{x = a}$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de $\mathscr{C}$ de f. Le graphique ci-contre illustre le fait cas où $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$		
Définition	**Limite finie en un point a**	Dire qu'une fonction f admet pour limite un réel ℓ lorsque x tend vers a signifie que tout intervalle ouvert contenant a contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On note : $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$	
Remarque 1	Si $a \in D$ et si f a une limite ℓ en a, alors $\ell = f(a)$. Le graphique ci-dessus illustre le cas où $a \in D$ et a n'est pas une borne de D		
Remarque 2	Il y a des cas où la limite à gauche de a n'est pas égale à la limite à droite de a. La fonction g représentée ci-contre est définie sur [0 ;3] Nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 0}} g(x) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 0}} g(x) = 0{,}5$