limites de fonctions

Opérations sur les limites de fonction

f et g sont deux fonctions définies sur le même ensemble de définition.
a désigne soit un nombre réel soit $+\infty$ soit $-\infty$. ℓ et ℓ' désignent des nombres réels.

Propriété

Somme et produit de fonctions

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \dots$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x)) = \dots$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Dans les cas notés FI (Forme indéterminée) on ne peut conclure immédiatement et tout résultat est possible. Dans un tel cas, il faut lever l'indétermination en changeant l'écriture.

Exemple

Dans les exemples ci-dessous $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Donc a priori $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-g(x))$ est une FI. Néanmoins lorsque :

- $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$. $f(x) - g(x) = \frac{1}{x}$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$
- $f(x) = x$ et $g(x) = 2x$. $f(x) - g(x) = -x$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = -\infty$
- $f(x) = 2x$ et $g(x) = x$. $f(x) - g(x) = x$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = +\infty$

Propriété

Quotient de fonctions

Si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ alors

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ alors

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple

Dans les exemples ci-dessous $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Donc a priori $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ est une FI.
Néanmoins lorsque :

- $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. $\frac{f(x)}{g(x)} = x$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = +\infty$
- $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$

Là encore on ne pouvait conclure immédiatement devant la FI. Il convenait de faire un petit calcul pour connaître la limite du quotient.