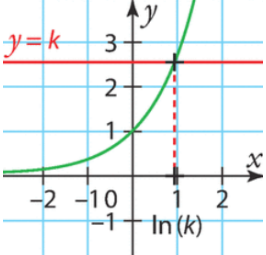
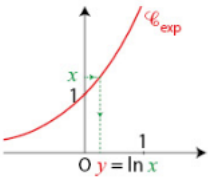
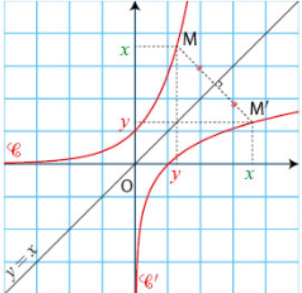
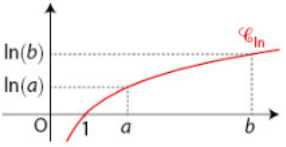


**Définition de la fonction logarithme**

<p><b>Préambule</b></p>	<p>La fonction exponentielle <math>x \rightarrow e^x</math> est définie, continue et strictement croissante sur <math>\mathbb{R}</math>. <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty</math> et <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty</math>                  L'équation <math>e^x = k</math> (<math>k \in \mathbb{R}^+</math>) admet donc une unique solution dans <math>\mathbb{R}</math> d'après le théorème des valeurs intermédiaires.</p>	
<p><b>Définition</b></p>	<p>La fonction <b>logarithme népérien</b>, notée <b>ln</b>, est la fonction définie sur <math>]0; +\infty[</math> qui à tout réel <math>x &gt; 0</math> associe l'unique solution <math>y</math> de l'équation <math>e^y = x</math>. On note <math>y = \ln(x)</math></p>	
<p><b>Conséquences</b></p>	<p>Elles découlent directement de la définition précédente.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pour tout réel <math>x &gt; 0</math> et pour tout réel <math>y</math>, <math>e^y = x \Leftrightarrow x = \ln y</math></li> <li>• Pour tout réel <math>x &gt; 0</math> <math>e^{\ln(x)} = x</math></li> <li>• Pour tout réel <math>x</math>, <math>\ln(e^x) = x</math> (en effet <math>e^{\ln(e^x)} = e^x</math>, <math>\ln(e^x)</math> est l'unique solution de l'équation <math>e^y = e^x</math> donc <math>y = x</math>)</li> <li>• <b><math>\ln(1) = 0</math></b> (car <math>e^0 = 1</math>) et <b><math>\ln(e) = 1</math></b> (car <math>e^1 = e</math>)</li> </ul>	
<p><b>Propriété</b></p>	<p>Dans un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions <math>x \rightarrow \ln(x)</math> et <math>x \rightarrow e^x</math> sont symétriques par rapport à la droite d'équation <math>y = x</math></p> <p align="center"><b>Démonstration</b></p> <p>Lemme (à vérifier et à montrer) : Le symétrique d'un point de coordonnées <math>(x; y)</math> par rapport à la droite d'équation <math>y = x</math> a pour coordonnées <math>(y; x)</math></p> <p>Soit <math>\mathcal{C}</math> la courbe d'équation <math>y = e^x</math> et <math>\mathcal{C}'</math> la courbe d'équation <math>y = \ln x</math>                  Soit un point <math>M(x; y)</math> de <math>\mathcal{C}</math>. Nous avons <math>y = e^x</math> son symétrique par rapport à la droite <math>y = x</math> est le point <math>M'(e^x, x)</math>. <math>x = \ln(e^x)</math> donc <math>M' \in \mathcal{C}'</math>. Réciproquement il est aisé de montrer que tout point de <math>\mathcal{C}'</math> a son symétrique sur <math>\mathcal{C}</math>. Nous en déduisons que les courbes <math>\mathcal{C}</math> et <math>\mathcal{C}'</math> sont symétriques par rapport à la droite d'équation <math>y = x</math></p>	
<p><b>Vocabulaire</b></p>	<p>On dit que les fonctions <math>x \rightarrow \ln x</math> et <math>x \rightarrow e^x</math> sont des fonctions réciproques.</p>	
<p><b>Propriété</b></p>	<p>Sens de variation</p>	<p>La fonction <math>x \rightarrow \ln(x)</math> est strictement croissante sur <math>\mathbb{R}^{**}</math></p>
<b>Démonstration</b>		
<p>Soient <math>x</math> et <math>y</math> deux réels de <math>\mathbb{R}^{**}</math> avec <math>y &gt; x</math>                  La fonction <math>x \rightarrow e^x</math> étant continue et strictement croissante sur <math>\mathbb{R}</math> alors il existe une unique solution dans <math>\mathbb{R}</math> à l'équation <math>x = e^t</math> ainsi qu'à l'équation <math>y = e^t</math>. Appelons <math>t_1</math> et <math>t_2</math> les deux réels tels que <math>e^{t_1} = x</math> et <math>e^{t_2} = y</math>.                  La fonction exponentielle étant strictement croissante nous avons <math>t_2 &gt; t_1</math>  <math>\ln y = \ln e^{t_2} = t_2</math> et <math>\ln x = \ln e^{t_1} = t_1</math> donc <math>\ln y &gt; \ln x</math>. <math>\ln y</math> et <math>\ln x</math> sont rangés dans le même ordre que <math>y</math> et <math>x</math> nous en déduisons que la fonction <math>\ln</math> est strictement croissante.</p>		
<p><b>Conséquences</b></p>	<p>Pour tous réels <math>a &gt; 0</math> et <math>b &gt; 0</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b><math>\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b</math></b></li> <li>• <b><math>\ln(a) &lt; \ln(b) \Leftrightarrow a &lt; b</math></b></li> <li>• <b><math>\ln(a) &gt; 0 \Leftrightarrow a &gt; 1</math></b></li> <li>• <b><math>\ln(a) &lt; 0 \Leftrightarrow 0 &lt; a &lt; 1</math></b></li> </ul>	