Logarithme. Cours

Croissances comparées.		
Propriété	1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$	2. Pour tout entier naturel $n\geq 1$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$

Démonstration (admise)

1. Quel que soit x dans $\mathbb{R}^+$, il existe t dans $\mathbb{R}$ tel que $x=e^t$ (fonction exponentielle strictement croissante, continue et $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$). Lorsque x tend vers $+\infty$, t tend vers $+\infty$ donc
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln e^t}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^t}{t}}=0$$
2. $\frac{\ln x}{x^n}=\frac{1}{x^{n-1}}*\frac{\ln x}{x}$; si $n>1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n-1}}=0$; si $n=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n-1}}=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$

Propriété	1. $\lim_{x\to0}xlnx=0$	2. Pour tout entier naturel $n\geq 1$ $\lim_{x\to0}x^nlnx=0$

Démonstration

1. Quel que soit x dans $\mathbb{R}^{*+}$, il existe t dans $\mathbb{R}^{*+}$ tel que $x=\frac{1}{t}$.
$\lim_{x\to0^+}xlnx=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}-\frac{\ln t}{t}=-\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$;
2. $x^nlnx=x^{n-1}*xlnx$; si $n>1$ $\lim\limits_{x\to0^+}x^{n-1}=0$; si $n=1$ $\lim\limits_{x\to0^+}x^{n-1}=1$; $\lim\limits_{x\to0^+}xlnx=0$ donc $\lim_{x\to0}x^nlnx=0$