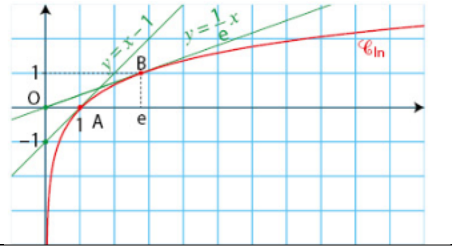
Logarithme. Cours

Propriétés algébriques.		
Propriété	**Produit**	Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ $\boldsymbol{ln(ab) = ln(a) + ln\,(b)}$
Démonstration		
$\begin{cases} e^{\ln(ab)} = ab \\ e^{lna+lnb} = e^{lna}e^{lnb} = ab \end{cases}$ donc $e^{\ln(ab)} = e^{lna+lnb}$ la fonction exponentielle étant continue et strictement croissante cela implique $ln(ab) = lna + lnb$		
Propriétés	**Inverse Quotient**	Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ • $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -lna$ • $ln\left(\frac{b}{a}\right) = lna - lnb$
Démonstration		
• $ln\left(\frac{1}{a}\right) + ln(a) = ln\left(\frac{a}{a}\right) = ln(1) = 0$ donc $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -lna$		• $ln\left(\frac{b}{a}\right) + ln(a) = ln\left(\frac{b}{a} * a\right) = ln\,(b)$ donc $ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - ln(a)$
Propriétés	**Puissance Racine carrée**	• Pour tout entier a et pour tout entier relatif n, $ln(a^n) = nln(a)$ • $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}lna$
Démonstration		
• Si $n > 0$ $ln(a^n) = ln(a * \ldots a) = lna + \cdots lna + lna = nlna$, si $n < 0$ $ln(a^n) = ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = ln\left(\frac{1}{a} * \frac{1}{a} * \ldots \frac{1}{a}\right) = ln\frac{1}{a} + ln\frac{1}{a} + \cdots ln\frac{1}{a} = nlna$ • $e^{ln(\sqrt{a})} = \sqrt{a}$, $e^{\frac{1}{2}lna} = (e^{lna})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ donc $e^{ln(\sqrt{a})} = e^{\frac{1}{2}lna}$ donc $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}lna$		
Exemple :	• $ln(x^2) = 2lnx$	• $ln\sqrt{2} - \frac{1}{3}ln4 = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{3}ln2^2 = \frac{1}{2}ln2 - \frac{2}{3}ln2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)ln2 = \left(\frac{3}{6} - \frac{4}{6}\right)ln2 = -\frac{1}{6}ln2$

Dérivabilité, continuité		
Propriété	1. La fonction ln est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ 2. Pour tout réel $x > 0$, $ln'(x) = \frac{1}{x}$	
Démonstration		
1. Admis 2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^{lnx}$. La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x > 0, f'(x) = e^{lnx} * ln'(x) = xln'(x)$ Or $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$ Il vient $1 = xln'(x) \to ln'(x) = \frac{1}{x}$		
Propriété	• $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty$	• $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
Démonstration		
Quel que soit $A > 0$ l'intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de lnx lorsque $x > e^A$ ($ln(x) > A \Leftrightarrow e^{lnx} > e^A \Leftrightarrow x > e^A$). Donc $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$ Donc $\lim\limits_{x\to 0} ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ Or $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -lnx$ Donc $\lim\limits_{x\to 0} -lnx = +\infty \to \lim\limits_{x\to 0} lnx = -\infty$		
Propriété	La fonction u désigne une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	
Exemple	Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + x^2)$. $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$	
Remarque	Les fonction u et $\ln u$ ont même sens de variation. En effet $(\ln u)'$ est du même signe que u' car $u > 0$	

<table>
<tr><th colspan="3">Tableau de variations, courbe</th></tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\ln'(x)$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$\ln(x)$</td><td>$-\infty \nearrow +\infty$</td></tr>
</table>
</td>
<td>


</td>
<td>Dans un repère orthonormé, l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln</td>
</tr>
</table>