

Opérations sur les variables aléatoires.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers d'une expérience aléatoire. X peut prendre les valeurs $a_1, a_2 \dots a_n$ et Y peut prendre les valeurs $b_1, b_2 \dots b_m$ où m et n sont des entiers naturels non nuls.

Définition $X + Y$

- La variable aléatoire $X + Y$ prend toutes les valeurs $a_i + b_j$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$
- Loi de probabilité de $X + Y$. Pour toute valeur w prise par $X + Y$, $P(X + Y = w)$ est la somme de toutes les probabilités $P(\{X = a_i\} \cap \{Y = a_j\})$ où $a_i + b_j = w$

1. En période de réglage de ses machines le contrôleur qualité d'une usine effectue de nombreux prélèvements dans la production et relève pour chaque pièce si elle a un défaut A, un défaut B. X (Respectivement Y) est la variable aléatoire qui compte le nombre de défauts A (Respectivement B). Dans le tableau ci-dessous figurent les lois de probabilité de X et de Y .

Nous en déduisons la loi de probabilité de la variable S qui compte le nombre de défauts (A ou B). $S = X + Y$

	Y	0	1	2	Loi de X
X	0	0,07	0,18	0,17	0,42
	1	0,15	0,20	0,23	0,58
Loi de Y		0,22	0,38	0,40	1

s	0	1	2	3
$P(S = \dots)$	0,07	0,33	0,37	0,23

$$P(S = 0) = P((X = 0) \cap (Y = 0)) = 0,07$$

$$P(S = 1) = P((X = 0) \cap (Y = 1)) + P((X = 1) \cap (Y = 0)) = 0,18 + 0,15 = 0,33$$

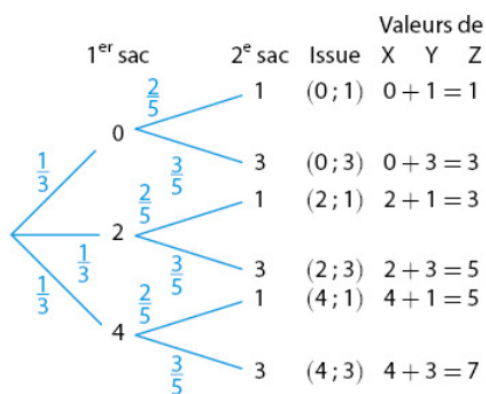
$$P(S = 2) = P((X = 0) \cap (Y = 2)) + P((X = 1) \cap (Y = 1)) = 0,17 + 0,2 = 0,37$$

$$P(S = 3) = P((X = 1) \cap (Y = 2)) = 0,23$$

Exemples

2. On dispose de deux sacs opaques. L'un contient 3 papiers portant les numéros 0, 2, 4. L'autre contient cinq papiers : 2 portant le numéro 1 et 3 portant le numéro 3. On tire un papier de chaque sac et on additionne les résultats obtenus. Z est la variable aléatoire qui donne le résultat. Donnons la loi de probabilité de Z

X est la variable aléatoire qui donne le numéro tiré dans le premier sac et Y celle qui donne le numéro tiré dans le deuxième sac. $Z = X + Y$. Représentons l'expérience par un arbre.



Les valeurs prises par Z sont 1, 3, 5 et 7.

$$P(Z = 1) = P((X = 0) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{3} * \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

$$P(Z = 3) = P((X = 0) \cap (Y = 3)) + P((X = 2) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{3} * \frac{2}{5} + \frac{2}{3} * \frac{2}{5} = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$P(Z = 5) = P((X = 2) \cap (Y = 3)) + P((X = 4) \cap (Y = 1)) = \frac{2}{3} * \frac{2}{5} + \frac{1}{3} * \frac{2}{5} = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$P(Z = 7) = P((X = 4) \cap (Y = 3)) = \frac{1}{3} * \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

Définition aX

a désigne un nombre réel différent de 0.

- 3. La variable aléatoire aX prend toutes les valeurs possibles $a * a_i$ avec $1 \leq i \leq n$
- 4. Loi de probabilité de aX : Pour toute valeur w prise par aX , $P(aX = w)$ est la somme de toutes les probabilités $P(\{X = a_i\})$ où $a * a_i = w$

Exemple

3. On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu et Y celle qui donne le double de ce numéro. Alors $Y = 2X$

$$P(Y = 6) = P(2X = 6) = P(X = 3) = \frac{1}{6}$$

Espérance ,indépendance, variance. Application à la loi binomiale.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers d'une expérience aléatoire. X peut prendre les valeurs $a_1, a_2 \dots a_n$ et Y peut prendre les valeurs $b_1, b_2 \dots b_m$ où m et n sont des entiers naturels non nuls.

Espérance

Propriété	<ul style="list-style-type: none"> $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ 	<ul style="list-style-type: none"> $E(aX) = aE(X)$
Remarque	On a coutume de dire que l'espérance est une fonction linéaire.	
Exemple	Reprenons l'exemple 1. ci-dessus. $E(X) = 0 * P(X = 0) + 1 * P(X = 1) = P(X = 1) = 0,58$. $E(Y) = 0 * P(Y = 0) + 1 * P(Y = 1) + 2 * P(Y = 2) = 0,38 + 2 * 0,4 = 1,18$ $E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 0,58 + 1,18 = 1,76$ Vérification : $E(S) = 0P(S = 0) + 1P(S = 1) + 2P(S = 2) + 3P(S = 3) = 0,33 + 2 * 0,37 + 3 * 0,23 = 1,76$	

Variables aléatoires indépendantes.

Définition	X et Y sont indépendantes lorsque les événements $\{X = a_i\}$ et $\{Y = b_j\}$ sont indépendants quels que soient i, j avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ Nous avons alors : $P(X = a_i \cap Y = b_j) = P(X = a_i)P(Y = b_j)$
Exemple	On lance successivement deux dés équilibrés, l'un à quatre faces numérotées de 1 à 4 et l'autre à 6 faces numérotées 0,3,3,6,6 et 6. X (resp. Y) est la variable aléatoire qui donne le résultat du premier (resp. deuxième) dé. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes car les deux lancers de dé le sont. Ainsi $P(X = 1 \cap Y = 3) = P(X = 1) * P(Y = 3) = \frac{1}{6} * \frac{2}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Variance

Propriété (admise)	On suppose X et Y deux v.a indépendantes et définies sur un même univers. a un réel différent de 0.
	<ul style="list-style-type: none"> $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ $V(aX) = a^2V(X)$
Exemple	X et Y sont deux v.a indépendantes telles que $V(X) = 1,25$ et $V(Y) = 5$ Alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 1,25 + 5 = 6,25$ et $V(3X) = 9V(X) = 9 * 1,25 = 11,25$

Espérance et variance d'une loi binomiale

Propriété	Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	
	<ul style="list-style-type: none"> $E(X) = np$ 	<ul style="list-style-type: none"> $V(X) = np(1 - p)$ et donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1 - p)}$

Démonstration (admise)

On note X_i avec $1 \leq i \leq n$ la v.a qui prend la valeur 1 en cas de succès à la i - ième épreuve et 0 sinon. Chaque variable X_i suit une loi de Bernouilli de paramètre p
 $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1 - p)$. Or $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ En généralisant les propriétés de l'espérance et de la variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes on obtient :

- $E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np$
- $V(X) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = np(1 - p)$