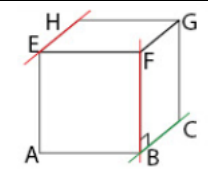


Orthogonalité espace, projections

Orthogonalité de 2 droites

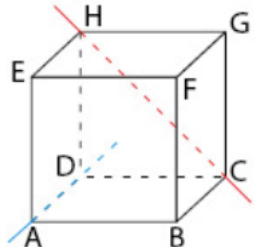
Définition	Dire que 2 droites sont orthogonales signifie que leurs parallèles passant par un même point quelconque sont perpendiculaires.
Remarque	Deux droites orthogonales ne sont pas forcément coplanaires alors que deux droites perpendiculaires le sont.
Exemple	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="flex: 1;"> <p>Dans un cube ABCDEFGH les droites (BF) et (EH) sont orthogonales car la parallèle (BC) à la droite (EH) est perpendiculaire en B à la droite (BF)</p> </div> <div style="flex: 0.5; text-align: center;">  </div> </div>
Propriété	Deux droites d et d' de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{u}' sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux c'est-à-dire si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$

Orthogonalité d'une droite et d'un plan

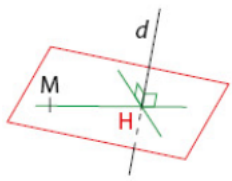
Définition	Dire qu'une droite est orthogonale à un plan signifie qu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan
Propriété	<p>Une droite d est orthogonale à un plan \mathcal{P} si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. Autrement dit :</p> <p>Une droite d de vecteur directeur \vec{n} est orthogonale à un plan \mathcal{P} si et seulement si il existe deux vecteurs non colinéaires de ce plan \vec{u} et \vec{v} tels que $\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$</p>

Démonstration (admise)

- Si une droite est orthogonale à un plan cela signifie qu'elle est orthogonale à toute droite du plan donc à deux droites sécantes du plan
- Soit une droite d orthogonale à deux droites sécantes d'un plan : d' et d'' . Considérons une troisième droite de ce plan d''' . Son vecteur directeur peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs directeurs de d' et d'' . Donc le produit scalaire de ce vecteur avec celui du vecteur directeur de d sera nul. Nous en déduisons que d est orthogonale à d''' et donc à toute droite de ce plan.

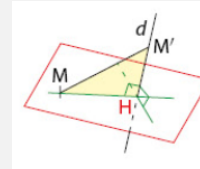
Exemple	<p>ABCDEFGH est un cube.</p> <ul style="list-style-type: none"> • La droite (DA) est perpendiculaire aux deux droites sécantes (DC) et (DH) du plan (DCH). Donc la droite (DA) est orthogonale au plan (DCH) • La droite (DA) est orthogonale au plan (DCH), elle est donc orthogonale à toute droite du plan (DCH), en particulier à la droite (HC) 	
----------------	--	---

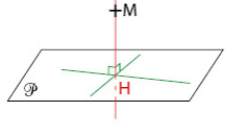
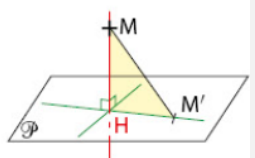
Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition	Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le point d'intersection H entre cette droite d et le plan passant par M et orthogonal à d .	
Remarque	Lorsque $M \in d$, alors le projeté orthogonal de M sur d est le point M	
Propriété et Définition	Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d est le point de d le plus proche de M . On dit que MH est la distance du point M à la droite d .	

Démonstration

- Si $M \in d$, alors $MH=0$ donc oui H est le point de d le plus proche de M
- Si $M \notin d$, alors pour tout point M' de d on a le triangle $MM'H$ rectangle en H . MM' est l'hypoténuse de ce triangle donc $MM' \geq MH$. Quelque soit M' sur d , $MM' \geq MH$ donc MH est bien la distance minimale entre M et la droite d .



Projection orthogonale d'un point sur un plan		
Définition	Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan \mathcal{P} est le point d'intersection H entre le plan \mathcal{P} et la droite perpendiculaire à \mathcal{P} passant par le point M .	
Remarque	Lorsque $M \in \mathcal{P}$, alors le projeté orthogonal de M sur \mathcal{P} est le point M	
Propriété et Définition	Le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan \mathcal{P} est le point de \mathcal{P} le plus proche de M . On dit que MH est la distance du point M au plan \mathcal{P} .	
Démonstration		
	<ul style="list-style-type: none"> • Si $M \in \mathcal{P}$, alors $MH=0$ donc oui H est le point de le plus proche de M • Si $M \notin \mathcal{P}$, alors pour tout point M' de \mathcal{P} on a le triangle $MM'H$ rectangle en H. MM' est l'hypoténuse de ce triangle donc $MM' \geq MH$. MH est bien la distance minimale entre M et le plan \mathcal{P}. 	
Exemple	<p>ABCDEFGH est un pavé droit.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABC) est le point (A). En effet (EA) orthogonal à (ABC) car (EA) perpendiculaire à (AB) et à (AC) • Le projeté orthogonal du point E sur la droite (CG) est le point G. En effet le plan (EFG) est orthogonal à la droite (CG). 	