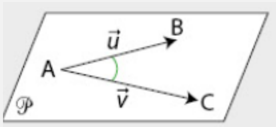
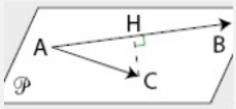
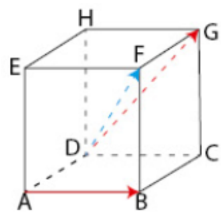
Produit scalaire espace

<table>
<tr><th colspan="4">Définition produit scalaire espace</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="3">Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ trois points de l'espace. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un point $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$</td></tr>
<tr><td>Remarque</td><td colspan="3">Calculer un produit scalaire en 3 dimensions revient donc à calculer un produit scalaire en 2 dimensions (dans le plan) tel que nous l'avons appris en première. Nous retrouvons donc les 2 modes principaux de calculs : avec les normes et le cosinus ou avec la projection orthogonale</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Propriété</td><td colspan="3">Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace</td></tr>
<tr><td>1ere méthode</td><td colspan="2">2ème méthode</td></tr>
<tr><td>• $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB * AC * \cos(\widehat{CBA})}$</td><td colspan="2">• Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}}$ ce qui donne :</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB * AH}$
lorsque H et C sont situés dans le même sens</td><td>$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -AB * AH}$
lorsque H et C sont situés dans le sens contraire</td></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="3">Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ noté $\vec{u}^2$ est le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$. Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}^2} = ||\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}||^2 = \boldsymbol{AB^2}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="5">Propriétés produit scalaire espace</th></tr>
<tr><td colspan="5">Les propriétés principales du produit scalaire dans le plan sont reconduites dans l'espace.</td></tr>
<tr><td>Propriété</td><td>Orthogonalité</td><td colspan="3">$\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ équivaut à $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 0}$</td></tr>
<tr><td>Remarque</td><td colspan="4">Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur de l'espace.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Propriétés</td><td>Symétrie et bilinéarité</td><td>$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = v.\vec{u}}$</td><td>$\boldsymbol{\vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v}}$</td><td>$\boldsymbol{\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}}$</td></tr>
<tr><td>Identités remarquables</td><td colspan="2">$\boldsymbol{(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}}$</td><td>$\boldsymbol{(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Formules de polarisation</td><td colspan="2">$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} + \vec{v}\|^2)}$</td><td>$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">En particulier pour trois points de l'espace A, B et C $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)}$</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="3">ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Déterminons $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DF}}$
• $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG}$ Or D, C et G sont coplanaires. C est le projeté orthogonal de G sur (DC).
Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DC} = DC^2 = 1$
• $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BF}$
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont coplanaires et perpendiculaires donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA} = 0$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2 = 1$
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires et perpendiculaires donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BF} = 0$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DF} = 0 + 1 + 0 = 1$</td><td>
=</td></tr>
</table>