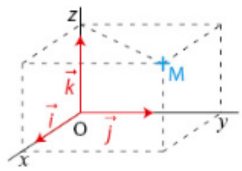
Produit scalaire espace

Base et repère orthonormés.			
Définitions	**Base orthonormée**	Dire qu'une **base** $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** signifie que ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de même norme. $(\|\|\vec{\imath}\|\| = \|\|\vec{\jmath}\|\| = \|\|\vec{k}\|\| = 1)$	
	Repère orthonormé	O étant un point de l'espace, le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormé lorsque la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormée.	

Expression analytique du produit scalaire.	
Propriété	Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. Alors $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$
Démonstration	
$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$; $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$; $\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}).(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) = xx'\vec{\imath}^2 + yy'\vec{\jmath}^2 + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + x'y\vec{\jmath}.\vec{\imath} = xx' + yy'$ En effet $\vec{\imath}^2 = \vec{\jmath}^2 = \|\|\vec{\imath}\|\|^2 = \|\|\vec{\jmath}\|\|^2 = 1$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$	
Exemples	Soient les vecteurs $\vec{u}(1 \quad 4 \quad 0)$ et $\vec{v}(-2 \quad 5 \quad 1)$. $\vec{u}.\vec{v} = 1 * (-2) + 4 * 5 + 0 * 1 = -2 + 20 = 18$
Propriété	Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux équivaut à $xx' + yy' + zz' = 0$ | $\|\|\vec{u}\|\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Démonstration	
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux équivaut à $\vec{u}.\vec{v} = 0$ ce qui équivaut à $xx' + yy' + zz'$ $\|\|\vec{u}\|\|^2 = \vec{u}.\vec{u} = \ x^2 + y^2 + z^2$ donc $\|\|\vec{u}\|\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	
Exemple	• les vecteurs $\vec{u}(1 \quad 3 \quad 1)$ et $\vec{v}(1 \quad -2 \quad 5)$ sont orthogonaux car $\vec{u}.\vec{v} = 1 * 1 + 3 * (-2) + 1 * 5 = 1 - 6 + 5 = 0$. • Soit $\vec{u}(1 \quad 3 \quad 1)$ alors $\|\|\vec{u}\|\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$
Propriété	Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
Démonstration	
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ donc $AB = \|\|\overrightarrow{AB}\|\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$	
Exemple	Soient $A\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$ et B$\begin{pmatrix}9\\5\\-2\end{pmatrix}$ deux points dans un repère orthonormé. $AB = \|\|\overrightarrow{AB}\|\| = \sqrt{(9-(-1))^2 + (5-5)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{10^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{125} = \sqrt{5 * 25} = 5\sqrt{5}$