

Suites arithmétiques, géométriques

Suites arithmétiques		
Définition	Suite arithmétique	<p>Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = u_n + r$</p> <div style="text-align: center; border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> </div>
Exemple	<p>La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$. Les premiers termes de (u_n) valent : $u_0 = -2; u_1 = 1; u_2 = 4; u_3 = 7; u_4 = 10 \dots$</p>	
Remarque	<p>Pour démontrer qu'une suite est arithmétique il suffit de montrer que $u_{n+1} - u_n$ est égal à une constante r.</p>	
Propriété	<p>Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + r * n$ • Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N} u_n = u_p + r * (n - p)$ 	
Démonstration		
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>$u_{p+1} = u_p + r;$ $u_{p+2} = u_{p+1} + r = u_p + r + r = u_p + 2r$ $u_{p+3} = u_{p+2} + r = u_p + 2r + r = u_p + 3r$ $u_n = u_{n-1} + r = u_p + (n - p - 1)r + r = u_p + (n - p)r$</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>Cas particuliers :</p> <p>$p = 0 ; u_n = u_0 + nr$ $p = 1 ; u_n = u_1 + (n - 1)r$</p> </div> </div>		
Propriété	Sens de variation	<ul style="list-style-type: none"> • Si $r > 0$ (u_n) est strictement croissante • Si $r < 0$ (u_n) est strictement décroissante • Si $r = 0$ (u_n) est constante
Démonstration		
$u_{n+1} - u_n = r \text{ donc si } \begin{cases} r > 0 \text{ (} u_n \text{) est strictement croissante} \\ r < 0 \text{ (} u_n \text{) est strictement décroissante} \\ r = 0 \text{ (} u_n \text{) est constante} \end{cases}$		
Propriété	<p>Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r de premier terme u_0</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $r > 0 \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ • Si $r = 0$ La suite est constante • Si $r < 0 \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ 	
Démonstration		
<ul style="list-style-type: none"> • Si $r > 0$ la suite est strictement croissante. $u_n = u_0 + nr$ donc la suite n'est pas majorée. Nous en déduisons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ • Si $r = 0$ La suite est constante. Ce point est trivial. • Si $r < 0$ la suite est strictement décroissante. $u_n = u_0 + nr$ donc la suite n'est pas minorée. Nous en déduisons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ 		
Remarque	<p>Dans la démonstration ci dessus nous avons fait partir la suite à u_0 mais nous aurions pu la faire partir à n'importe quel terme.</p>	

Suites géométriques				
Définition	Suite géométrique	Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q , appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = q * u_n$		
Exemple	La suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n$ est la suite géométrique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 0,5$. Les premiers termes de (u_n) valent : $u_0 = 0,5 ; u_1 = 1 ; u_2 = 2 ; u_3 = 4 ; u_4 = 8 \dots$			
Remarque	Pour démontrer qu'une suite est géométrique il suffit de montrer si les termes sont non nuls que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à une constante q .			
Propriété	Soit (u_n) une suite géométrique de raison q <ul style="list-style-type: none"> • Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 * q^n$ • Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N} u_n = u_p * q^{n-p}$ 			
Démonstration				
$u_{p+1} = qu_p ;$ $u_{p+2} = q * u_{p+1} = q * qu_p = q^2u_p$ $u_{p+3} = q * u_{p+2} = q * q^2u_p = q^3u_p$ $u_n = q * u_{n-1} = q * q^{n-p-1} u_p = q^{n-p} u_p$		Cas particuliers : $p = 0 ; u_n = q^n u_0$ $p = 1 ; u_n = q^{n-1} u_1$		
Sens de variation	Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$			
	Si $q > 1$	Si $0 < q < 1$	Si $q = 0$ ou $q = 1$	Si $q < 0$
	Si $u_0 > 0$ alors (u_n) strictement croissante Si $u_0 < 0$ alors (u_n) strictement décroissante	Si $u_0 > 0$ alors (u_n) strictement décroissante Si $u_0 < 0$ alors (u_n) strictement croissante	(u_n) constante	(u_n) n'est pas monotone
Démonstration				
$u_{n+1} - u_n = qu_n - u_n = (q - 1)u_n$				
<ul style="list-style-type: none"> • Si $q = 0$ la suite est constante à 0 • Si $q = 1$ la suite est constante. • Si $q < 0$ les termes de la suite changent de signe l'un après l'autre. La suite (u_n) n'est pas monotone • Si $q > 1$ Si $u_0 > 0$ tous les termes de la suites sont > 0 $u_{n+1} - u_n = (q - 1)u_n$ Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ $u_{n+1} > u_n$ La suite est strictement croissante. Si $u_0 < 0$ tous les termes de la suites sont < 0 $u_{n+1} - u_n = (q - 1)u_n$ Donc $u_{n+1} - u_n < 0$ $u_{n+1} < u_n$ La suite est strictement décroissante. • Si $0 < q < 1$ Si $u_0 > 0$ tous les termes de la suites sont > 0 $u_{n+1} - u_n = (q - 1)u_n$ Donc $u_{n+1} - u_n < 0$ $u_{n+1} < u_n$ La suite est strictement décroissante. Si $u_0 < 0$ tous les termes de la suites sont < 0 $u_{n+1} - u_n = (q - 1)u_n$ Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ $u_{n+1} > u_n$ La suite est strictement croissante. 				

Propriété	Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$			
	Si $q > 1$	Si $-1 < q < 1$	Si $q = 0$ ou $q = 1$	Si $q \leq 1$
	Si $u_0 > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ Si $u_0 < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	(u_n) constante	(u_n) n'admet pas de limite

Preuve

- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$ la suite est strictement croissante. $u_n = u_0 * q^n$ donc la suite n'est pas majorée.
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$ la suite est strictement décroissante. $u_n = u_0 * q^n$ donc la suite n'est pas minorée.
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- Si $-1 < q < 1$ Considérons $v_n = |u_n|$, $v_{n+1} = q'v_n$ avec $0 < q' < 1$ et $v_0 > 0$. (v_n) est donc strictement décroissante et minorée par 0. Donc elle converge. Si elle convergerait vers une limite $l > 0$ cela supposerait qu'elle soit minorée par l . C'est impossible ($v_n = q'^n v_0$ avec $0 < q' < 1$ et $v_0 > 0$). Donc elle converge vers 0 donc (u_n) converge aussi vers 0
- Si $q = 0$ ou $q = 1$. Evident
- Si $q \leq 1$ Admis