

**Suites numériques. Cours.**

**Modes de génération d'une suite. Représentation graphique. Sens de variation**

**Qu'est ce qu'une suite numérique ?**

<b>Définition</b>	Une suite $u$ est une fonction qui à tout entier naturel $n$ associe un nombre réel, noté $u(n)$ ou $u_n$ . $u_n$ est appelé le <b>terme d'indice <math>n</math> ou de rang <math>n</math></b> .	
<b>Notation</b>	La suite se note $u$ ou avec des parenthèses : $(u_n)$ .	$u : n \rightarrow u_n$
<b>Exemple</b>	Considérons $u$ la suite des entiers naturels impairs. $u_0 = 1 ; u_1 = 3 ; u_2 = 5 ; u_3 = 7 \dots$	

**Modes de génération d'une suite numérique**

<b>Suite définie par une formule explicite</b>	<b>Définition</b>	Soit $f$ une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ On peut définir $u$ en posant pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ $u_n = f(n)$	
	<b>Exemple</b>	Soit $f : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow x^2$	Nous pouvons définir la suite $u$ par $u_n = f(n)$ . $u_0 = 0 ; u_1 = 1 ; u_2 = 4 ; u_3 = 9 \dots$
<b>Suite définie par récurrence</b>	<b>Définition</b>	Ce procédé signifie que l'on donne le terme initial d'une suite et une relation permettant de déduire chaque terme à partir du précédent. Une telle relation est appelée <b>relation de récurrence</b> .	
	<b>Exemple</b>	Soit $u$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ $u_0 = 1 ; u_1 = -1 ; u_2 = -5 ; u_3 = -13 \dots$	

**Représentation graphique**

La représentation graphique dans un repère des termes d'une suite  $u$  est l'ensemble des points isolés de coordonnées  $(0 ; u_0), (1 ; u_1), (2 ; u_2), (3 ; u_3), (4 ; u_4) \dots (n ; u_n) \dots$

<b>Exemples</b>	Suite définie de manière explicite	
	<p>On considère la suite <math>u_n</math> définie par :</p> <p>Pour tout entier naturel <math>n</math>, <math>u_n = \frac{6}{n+2}</math></p> <p><math>u_0 = 3 ; u_1 = 2 ; u_2 = \frac{3}{2} ; u_3 = \frac{6}{5} ; u_4 = 1 ;</math></p> <p>Les points <math>A_0(0 ; 3), A_1(1 ; 2), A_2(1 ; \frac{3}{2}), A_3(3 ; \frac{6}{5}), A_4(4 ; 1)</math> sont les cinq premiers points de la représentation graphique de cette suite.</p>	
	Suite définie par récurrence	
	<p>On considère la suite <math>u_n</math> définie par :</p> <p><math>u_{n+1} = \sqrt{u_n}</math> avec <math>u_0 = 9</math></p> <p>(Utilisation de la droite d'équation <math>y = x</math> et de la courbe de la fonction <math>f : x \rightarrow \sqrt{x}</math>)</p>	

<b>Sens de variation</b>		
<b>Définition</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dire qu'une suite <math>u</math> est croissante à partir du rang <math>k</math> signifie que pour tout <math>n \geq k</math>, <math>u_{n+1} \geq u_n</math></li> <li>• Dire qu'une suite <math>u</math> est décroissante à partir du rang <math>k</math> signifie que pour tout <math>n \geq k</math>, <math>u_{n+1} \leq u_n</math></li> <li>• Dire qu'une suite <math>u</math> est constante à partir d'un certain rang signifie que pour tout <math>n \geq k</math> <math>u_{n+1} = u_n</math></li> <li>• Dire qu'une suite <math>u</math> est monotone à partir d'un certain rang signifie que pour tout <math>n \geq k</math> <math>u</math> est soit croissante, soit décroissante</li> </ul>	
<b>Remarque</b>	Comme pour les fonctions si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes on parle alors de suite, strictement croissante, strictement décroissante ....	
<b>Méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite</b>	<b>Etude du signe de :</b> $u_{n+1} - u_n$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>u_{n+1} - u_n &gt; 0</math> (à partir d'un certain rang) alors la suite est strictement croissante (à partir de ce rang)</li> <li>• Si <math>u_{n+1} - u_n &lt; 0</math> (à partir d'un certain rang) alors la suite est strictement décroissante (à partir de ce rang)</li> </ul>
		Exemple : soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = u_n + n^2$ Pour tout $n \geq 1$ $u_{n+1} - u_n = n^2$ . $n^2 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ (pour $n \geq 1$ ). La suite $(u_n)$ est donc strictement croissante (à partir du rang 1).
	<b>Comparer <math>\frac{u_{n+1}}{u_n}</math> à 1</b>	Soit $(u_n)$ une suite dont tous les termes sont strictement positifs (à partir d'un certain rang $n_0$ ) <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>\frac{u_{n+1}}{u_n} &gt; 1</math> (à partir d'un rang <math>n_1</math> tel que <math>n_1 \geq n_0</math>) alors <math>(u_n)</math> strictement croissante (à partir du rang <math>n_1</math>).</li> <li>• Si <math>\frac{u_{n+1}}{u_n} &lt; 1</math> (à partir d'un rang <math>n_1</math> tel que <math>n_1 \geq n_0</math>) alors <math>(u_n)</math> strictement décroissante (à partir du rang <math>n_1</math>).</li> </ul>
	Exemple : soit $(u_n)$ la suite définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $u_n = 5 * 3^n$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 * 3^{n+1}}{5 * 3^n} = 3$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc la suite est strictement croissante.	