Suites

Majoration, monotonie, convergence

Définition

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$. On dit que :

- (u_n) est majorée à partir du rang n_0 si il existe un réel M tel que quelque soit $n \geq n_0, u_n \leq M$
- (u_n) est minorée à partir du rang n_0 si il existe un réel M tel que quelque soit $n \geq n_0, u_n \geq M$
- (u_n) est bornée à partir du rang n_0 lorsqu'elle est majorée et minorée.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \frac{2}{n}$

- Pour $n \geq 1, \frac{2}{n} \leq 1$donc $u_n \leq 2$ (u_n) est donc majorée par 2.
- $u_n \geq 1$ donc (u_n) est minorée par 1.
- (u_n) est donc bornée

Théorème

Toute suite croissante mais non majorée admet comme limite $+\infty$	Toute suite décroissante mais non minorée admet comme limite $-\infty$

Démonstration

Nous allons démontrer l'affirmation de gauche. Soit (u_n) une suite croissante non majorée. (u_n) est non majorée. Donc quelque soit un réel A il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \geq A$. (u_n) est croissante donc pour tout $n \geq n_0$ $u_n \geq u_{n_0} \geq A$. Cela signifie qu' à partir d'un certain rang, tous les termes u_n sont compris dans l'intervalle $[A; +\infty[$. Cela signifie que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Théorème

Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.	Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge.

Démonstration (admise)

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et par $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 20$.

- Nous allons d'abord démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq u_{n+1} \leq 50.$ Nous appellerons cette affirmation $P(n)$
  Intialisation : $u_0 = 30$; $u_1 = 0{,}6u_0 + 20 = 0{,}6 * 30 + 20 = 38$ donc $u_0 \leq u_1 \leq 50$. $P(0)$ vraie.
  Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie
  $u_n \leq u_{n+1} \leq 50 \rightarrow 0{,}6 * u_n + 20 \leq 0{,}6 * u_{n+1} + 20 \leq 0{,}6 * 50 + 20 \rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 50$
  $P(n+1)$ est vérifiée.
  Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq u_{n+1} \leq 50$.
- Nous en déduisons que (u_n) est croissante et majorée. Donc elle converge.

Remarque

Ce théorème prouve l'existence d'une limite mais il ne dit pas quelle est cette limite.

Théorème

Si une suite (u_n) est majorée par M et qu'elle converge ves un nombre ℓ alors $\ell \leq M$	Si une suite (u_n) est minorée par m et qu'elle converge ves un nombre ℓ alors $\ell \geq m$

Démonstration (pas requise)

Exemple

Reprenons l'exemple précédent :(u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et par $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 20$.
Nous avons démontré que cette suite était convergente vers une limite ℓ et qu'elle était majorée par 50.

Nous pouvons donc en déduire que $\ell \leq 50$