

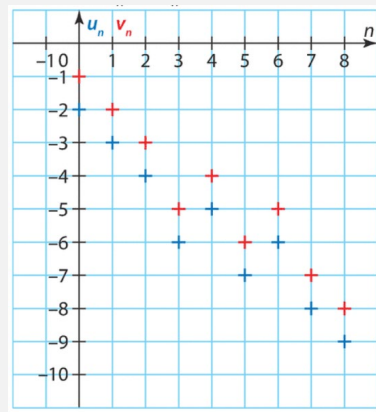
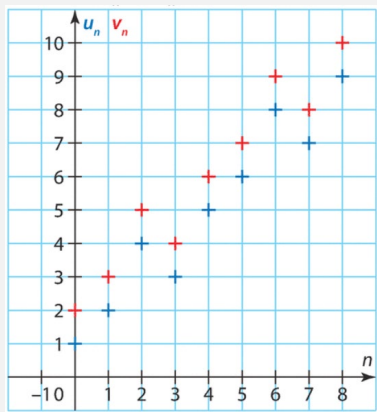
**Théorèmes de comparaison pour les suites**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies sur  $\mathbb{N}$ . A partir d'un certain rang  $n_0, v_n \geq u_n$

si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

**Théorème de comparaison**



**Démonstration**

Démontrons la propriété de gauche.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  Donc quelque soit le nombre réel A, il existe un rang p tel que pour tout  $n \geq p$  l'intervalle  $[A; +\infty[$  contienne tous les termes  $u_n$ . Donc pour tout  $n \geq p, u_n \geq A$ .

Par hypothèse, à partir d'un certain rang  $n_0, v_n \geq u_n$ . Posons  $n_1 = \max(p, n_0)$ . Pour tout  $n \geq n_1, u_n \geq A$  et  $v_n \geq u_n$ . Donc  $v_n \geq A$ . Nous avons donc trouvé un seuil  $n_1$  tel que pour tout  $n \geq n_1$ , l'intervalle  $[A; +\infty[$  contienne tous les termes  $v_n$ . C'est la définition de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

**Exemple**

- On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = n + n^2$ . Soit  $v_n$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = n$ . A partir de  $n = 0$  nous avons  $u_n \geq v_n$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = -n - \frac{1}{n}$ . Soit  $v_n$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = -n$ . A partir de  $n = 1$  nous avons  $u_n \leq v_n$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

**Propriété**

Soit une suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = q^n$  (q nombre réel). Dans le cas où

- $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \infty$
- $q = 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$
- $-1 < q < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- $q < -1$  alors  $(u_n)$  n'admet pas de limite.

**Démonstration**

Nous allons démontrer le 1<sup>er</sup> cas : Si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \infty$ .

Si  $q > 1$  alors nous pouvons écrire  $q = 1 + a$  avec  $a > 0$ .  $q^n = (1 + a)^n$ . Nous avons déjà démontré (Inégalité de Bernouilli) que pour  $a > 0, (1 + a)^n \geq 1 + na$ . Soit  $v_n = 1 + na$ . Nous avons  $u_n \geq v_n$ . Or  $a > 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \infty$ .

D'après un théorème de comparaison nous en déduisons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \infty$ .

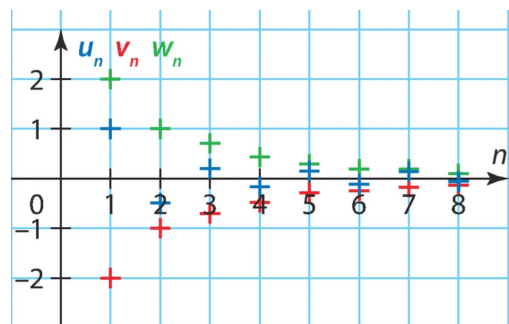
**Théorème des gendarmes**

Soient  $(u_n), (v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites définies sur  $\mathbb{N}$  telles que à partir d'un certain rang  $v_n \leq u_n \leq w_n$ . Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$  (avec l nombre réel) alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

**Démonstration (pas exigible)**

**Exemple 1**

Sur l'exemple ci-contre on a représenté  $(u_n)$  en bleu,  $(v_n)$  en rouge,  $(w_n)$  en vert.



**Exemple 2**

Soit  $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$ ;  $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$ ; les suites  $(\frac{1}{n})$  et  $(-\frac{1}{n})$  convergent vers 0. Donc  $(u_n)$  converge vers 0