

Récurrence

Théorème	Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n . Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que : <ul style="list-style-type: none"> • $P(n_0)$ est vraie (Initialisation) • Pour tout entier naturel $n \geq n_0$ si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie aussi. (Hérédité) • Conclusion : Alors pour tout entier naturel $n \geq n_0$ $P(n)$ est vraie. 	
Exemples	Nous voudrions montrer que pour $n \geq 2$ $3^n = 5n + 1$ <ul style="list-style-type: none"> • <i>Initialisation</i> : $P(2)$: $3^2 = 5 * 2 + 1$? Non, $3^2 = 9$ et $5 * 2 + 1 = 11$. L'initialisation n'est donc pas possible. Ce n'est pas la peine d'aller plus loin et de prouver l'hérédité. • Conclusion : Nous sommes sur que l'affirmation pour $n \geq 2$ $3^n = 5n + 1$ est fautive. 	Nous voudrions montrer que pour $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ <ul style="list-style-type: none"> • <i>Initialisation</i> : $P(1)$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$? Oui, $\frac{1(1+1)}{2} = 1 * \frac{2}{2} = 1$. Donc l'initialisation est vérifiée. Nous pouvons passer à l'hérédité. • <i>Hérédité</i> : Nous supposons que pour $n \geq 1$, $P(n)$ est vraie. C'est-à-dire $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie aussi. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow$ $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \rightarrow$ $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \rightarrow$ $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \rightarrow$ $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $P(n+1)$ est vraie donc • Conclusion : pour $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Propriété	Inégalité de Bernoulli	Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geq 1+na$
Exemple	Pour tout entier naturel n : $(1+3)^n \geq 1+3n \rightarrow 4^n \geq 1+3n$	
Démonstration		
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Initialisation</i> : $P(0)$: $(1+a)^0 \geq 1+0*a$? $(1+a)^0 = 1$ et $1+0*a = 1$ donc oui, $P(0)$ est vérifiée, nous pouvons passer à l'hérédité. • <i>Hérédité</i> : Supposons que $P(n)$ est vraie et tachons de montrer qu'alors $P(n+1)$ est vraie aussi. $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n * (1+a)$. Utilisons $P(n)$: $(1+a)^n \geq 1+na$ donc $(1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) \rightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2 \geq 1+a(1+n+na) \geq 1+a(n+1)$ Nous avons démontré $P(n+1)$ • Conclusion pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geq 1+na$ 		