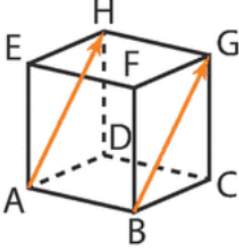
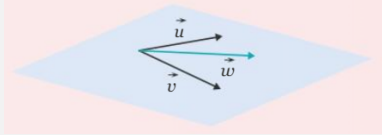
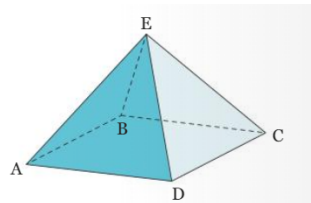
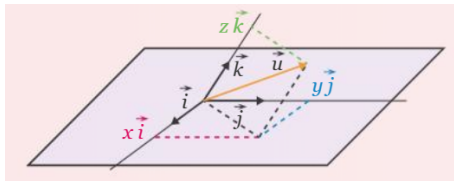


Vecteurs, droites, plans de l'espace

Vecteurs de l'espace

Définition	translation de vecteur \overrightarrow{AB}	Soient A et B deux points de l'espace. La transformation qui à tout point M associe le point M' tel que ABM'M soit un parallélogramme s'appelle la translation de vecteur \overrightarrow{AB} . Comme dans le plan les vecteurs \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{MM'}$ sont égaux car ils définissent la même translation. On dit qu'ils sont deux représentants d'un même vecteur \vec{u}
Exemple	Dans le cube ABCDEFGH les vecteurs \overrightarrow{AH} et \overrightarrow{BG} sont égaux car AHGB est un parallélogramme. Ils définissent la même translation.	
Définition	Colinéarité de deux vecteurs.	Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires lorsqu'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. (Remarque : le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur)
Définition	Vecteurs coplanaires	On considère quatre points du plan : O, A, B et C. On définit trois vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} par $\vec{u} = \overrightarrow{OA}, \vec{v} = \overrightarrow{OB}, \vec{w} = \overrightarrow{OC}$. On dit que \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires lorsque les points O, A, B et C appartiennent au même plan. (Lorsqu'ils sont donc coplanaires)
Propriété	Soient \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace tels que \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires. (Ils ne peuvent donc pas être nuls). Les vecteurs que \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si il existe deux nombres réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$	
Exemple	Dans la pyramide ci-contre ABCDE où la base ABCD est un parallélogramme on considère les vecteurs suivants : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}, \vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$ En effet $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ car ABCD est un parallélogramme. Donc $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \vec{u} + \vec{v}$ Donc \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires. (Ici $\lambda = \mu = 1$)	
Définition	Vecteurs linéairement indépendants	Soient \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace. Ces vecteurs sont dits linéairement indépendants lorsqu'ils ne sont pas coplanaires. Soient a, b et c trois réels : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.
Définition	Base	Trois vecteurs linéairement indépendants forment une base de l'espace.
Propriété	Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace. Pour tout vecteur \vec{w} de l'espace il existe trois réels x, y et z tels que $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Cette décomposition est unique. On note $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées de \vec{w} dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	
Exemple	Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}, \vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$ Les coordonnées de \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Supposons qu'il existe trois réels a, b et c tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a - b + c \\ a + b \\ a + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ Donc \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont linéairement indépendants. Ils forment une base de l'espace.	

Propriété	<p>Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace. Dans cette base les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.</p> <p>Soit t un nombre réel. Alors le vecteur $t\vec{u}$ aura pour coordonnées $\begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ aura pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$</p>
Exemple	<p>Soient les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dont les coordonnées sont données dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. Dans cette même base, le vecteur $3\vec{u}$ aura pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 * 3 \\ 3 * 2 \\ 3 * 1 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$</p> <p>Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ aura pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 2 + 2 \\ 1 + 5 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$</p>
Démonstration	
<p>Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$</p> $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} ; t\vec{u} = tx\vec{i} + ty\vec{j} + tz\vec{k} ; t\vec{u} \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$ $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} ; \vec{u} + \vec{v} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} + (z + z')\vec{k} ; (\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$	