

Matrices. Cours

Algèbre de matrices

Définition	<p>Deux matrices A et B sont sommables lorsqu'elles ont la même dimension.</p> <p>Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ La somme de A et de B se note $A + B$ et est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ Si $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = ((b_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ alors $A + B = ((c_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ avec : $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, n\} c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$</p>
Exemple	<p>Si $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$</p>
Définition	<p>Soient A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = ((a_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ Soit k un réel. La matrice kA est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $kA = ((ka_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$</p>
Exemple	<p>Si $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $k = -2$ alors $kA = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -8 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$</p>
Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> • L'addition de deux matrices est commutative : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) A + B = B + A$ • L'addition de deux matrices est associative : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ • Le produit de matrices par un scalaire est distributif : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}, k(A + B) = kA + kB$
Preuve	
<p>Il suffit de montrer ces propriétés au niveau des coefficients de chaque matrice. La commutativité et l'associativité de l'addition dans \mathbb{R} et la distributivité dans \mathbb{R} font le reste.</p>	
Définition	<p>Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice ne comportant que des 0 se note $\mathbf{0}_{n,p}$</p>
Exemple	<p>$0_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$</p>
Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> • $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) A + \mathbf{0}_{n,p} = \mathbf{0}_{n,p} + A = A$ • $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R} kA = \mathbf{0}_{n,p}$ ssi $\begin{cases} A = \mathbf{0}_{n,p} \\ \text{ou} \\ k = 0 \end{cases}$
Preuve	
<p>Là encore il suffit de remplacer A par $((a_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $\mathbf{0}_{n,p}$ par $((0))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et les deux propriétés deviennent évidentes</p>	
Définition	<p>Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ Soit B une matrice de $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$. $B = ((b_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq q}}$ Le produit de A par B que l'on note AB n'est défini que ssi $p = m$ Dans ce cas AB est alors une matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ avec $AB = ((c_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} * b_{k,j}$</p>

Exemple	Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $AB = \begin{pmatrix} 1 * (-1) + 2 * (-3) + 3 * 1 & 1 * 2 + 2 * (-5) + 3 * 2 \\ 4 * (-1) + 5 * (-3) + 6 * 1 & 4 * 2 + 5 * (-5) + 6 * 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -13 & -5 \end{pmatrix}$
Remarque	<ul style="list-style-type: none"> Le produit AB n'a de sens que si le nombre de lignes de A est égal au nombre de colonnes de B Si le produit AB est défini, cela ne veut pas dire que le produit BA le soit. La multiplication dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ n'est donc pas commutative.
Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> La multiplication est associative : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{R}) \quad A(BC) = (AB)C = ABC$ La multiplication est distributive : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R}) \quad A(B + C) = AB + AC$ $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R}) \quad (A + B)C = AC + BC$ $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}$ $(kA)B = k(AB) = A(kB)$ $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad A * 0_{p,m} = 0_{n,m}$ $\forall A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R}) \quad 0_{n,m}A = 0_{n,p}$
Preuve	
Les preuves se démontrent là encore au niveau des coefficients.	