

Matrices. Cours

Application 1 : système linéaire

Propriété	<p>Soit le système linéaire suivant $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$</p> <p>Ce système peut s'écrire $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$;</p> <p>Dans le cas où A est inversible alors ce système admet une solution unique $X_0 = A^{-1}B$</p>
Preuve	
<p>$AX_0 = AA^{-1}B = B$ donc X_0 est solution. Soit X_1 une autre solution. $AX_1 = B \Rightarrow X_1 = A^{-1}B$ en composant à gauche et à droite par A^{-1}</p>	
Exemple	<p>Soit le système $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ Ce système peut s'écrire $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car $\det(A) = 2$</p> <p>$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc le système admet une solution unique</p> $X_0 = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Application 2 : Suites de matrices.

Propriété	<p>Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit B une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ Soit $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $U_{p+1} = AU_p + B$ pour tout p</p> <ol style="list-style-type: none"> S'il existe une matrice X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX + B = X$ Alors la suite de matrice $(V_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par $V_p = U_p - X$ Vérifie $V_{p+1} = AV_p$ Nous avons alors $U_p = A^p(U_0 - X) + X$ pour tout p Si $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente alors sa limite U vérifie $U = AU + B$
Preuve	
<ol style="list-style-type: none"> Soit $(V_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par $V_p = U_p - X$ $V_{p+1} = U_{p+1} - X = AU_p + B - X$. Or $AX + B = X \Rightarrow B - X = -AX$ Donc $V_{p+1} = AU_p - AX = A(U_p - X) = AV_p$ Par une récurrence immédiate on démontre que $V_p = A^p V_0$ Il vient $U_p - X = A^p(U_0 - X) \Rightarrow U_p = A^p(U_0 - X) + X$ pour tout p La relation $U_{p+1} = AU_p + B$ en faisant tendre p vers $+\infty$ donne $\lim_{p \rightarrow +\infty} U_{p+1} = \lim_{p \rightarrow +\infty} (AU_p + B) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (AU_p) + B = A \lim_{p \rightarrow +\infty} U_p + B \Leftrightarrow U = AU + B$ 	

Exemple	Soit le système de suites défini par $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}y_n + 2 \end{cases}$ et initialisé par $\begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 3 \end{cases}$
	Ce système de suite peut s'écrire $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
	Résolvons le système $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + 1 \\ y = \frac{1}{4}y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases}$
	Donc $\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ vérifie $\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
	Nous pouvons donc appliquer la propriété. $\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^p \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^p \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^p \begin{pmatrix} -\frac{16}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

Application 3 : Transformations du plan	
Propriété	Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur du plan. Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan. Alors l'image du point M par la translation de vecteur \vec{u} est le point M' dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont données par : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Exemple	Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. L'image du point $M \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ par la translation de vecteur \vec{u} est $M' \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3+3 \end{pmatrix}$ soit $M' \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
Preuve	
Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan. Alors l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le point M' dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont telles que $\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$	
Propriété	Soit θ un angle. L'image d'un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ par la rotation d'angle θ et de centre O l'origine du repère est le vecteur $\vec{u'} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont données par : $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Preuve	
L'image de $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par cette rotation R est le vecteur $\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ L'image de $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par cette rotation R est le vecteur $-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque. $R(\vec{u}) = R(a\vec{i} + b\vec{j}) = aR(\vec{i}) + bR(\vec{j}) = a(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + b(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$ $R(\vec{u}) = (a \cos \theta - b \sin \theta) \vec{i} + (a \sin \theta + b \cos \theta) \vec{j}$	
Les coordonnées de $R(\vec{u})$ sont bien $\begin{pmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta \\ a \sin \theta + b \cos \theta \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	

Exemple	<p>Considérons la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ rad et de centre 0.</p> <p>Cette rotation a pour matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.</p> <p>L'image du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ par cette rotation est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$</p> <p>Soit $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{pmatrix}$</p>
Propriété	<p>Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan. L'image de ce point par la rotation d'angle θ et de centre 0 est le point $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que</p> $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Preuve	
Il suffit d'écrire la relation vectorielle entre le vecteur $\overrightarrow{OM'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	