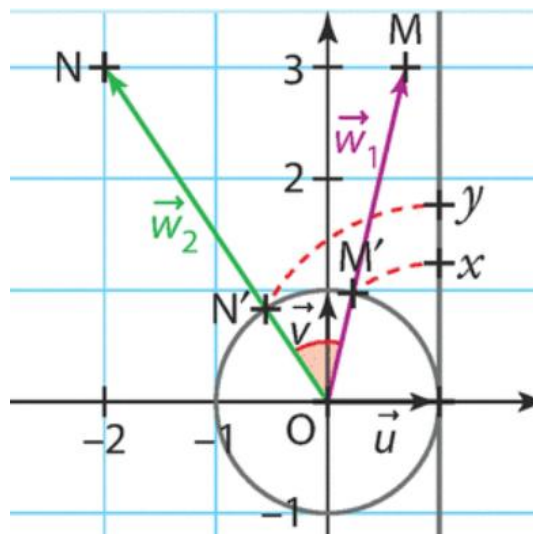


Angle orienté

Définition

Soit (O, \vec{u}, \vec{v}) un repère orthonormé.
 Soient M et N deux points du plan complexe.
 Soient M' et N' les intersections de $[OM]$ et $[ON]$ avec le cercle trigonométrique.
 Soient x et y les valeurs réelles correspondant à M' et N' sur la droite des réels enroulée autour du cercle trigonométrique.
 On appelle angle orienté entre \vec{OM} et \vec{ON} que l'on note (\vec{OM}, \vec{ON}) ou $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ le réel $y - x$



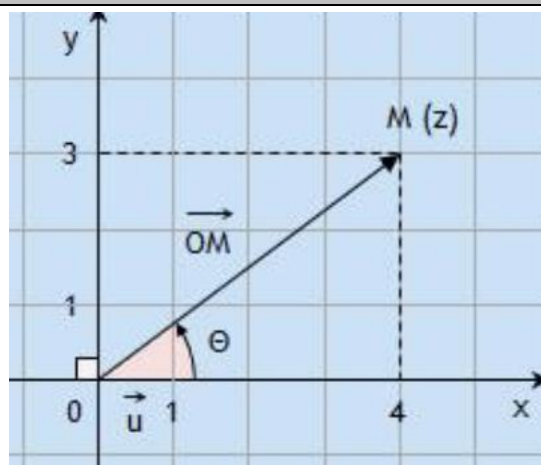
Remarques

- Un angle orienté possède une infinité de mesures. Si θ est l'une d'entre elle, alors $\theta + 2\pi$ en est une aussi et de manière générale toute les mesures seront du type $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On note donc $(\vec{OM}, \vec{ON}) = \theta [2\pi]$ que l'on prononce « modulo 2π »
- En reprenant les notations de la définition précédente, nous pouvons remarquer que $(\vec{u}, \vec{OM}) = x [2\pi]$ et $(\vec{u}, \vec{ON}) = y [2\pi]$
- $(\vec{u}, \vec{v}) = +\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(\vec{v}, \vec{u}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

Argument d'un complexe

Définition

Soit (O, \vec{u}, \vec{v}) un repère orthonormé définissant un plan complexe.
 Soit z un nombre complexe.
 Soit M le point du plan complexe d'affixe z
 Alors on appelle **un argument** de z **une mesure** de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{OM}) .
 On le note $\arg(z)$



Remarques

- Tout comme un angle orienté, un argument possède une infinité de mesures modulo 2π . On note donc sur le schéma ci-dessus : $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{OM}) = \theta [2\pi]$
- Le nombre complexe 0 ne possède pas d'argument.
- $\arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$; $\arg(-1) = \pi [2\pi]$; $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$; $\arg(1) = 0 [2\pi]$

Propriétés

$z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) = 0 [2\pi]$	$z \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg(z) = \pi [2\pi]$	$z \in i\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
$z \in i\mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$	$\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$	$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$

Preuve

Les preuves se trouvent très rapidement avec un petit schéma.

Théorème	Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Alors un argument α de z est un nombre réel tel que :	
	$\cos \alpha = \frac{a}{ z }$	$\sin \alpha = \frac{b}{ z }$
Preuve		
<p>Dans le cas où $a \geq 0$ et $b \geq 0$ les relations trigonométriques dans le triangle rectangle nous donnent directement le résultat.</p> <p>Dans le cas où $a \leq 0$ la même relation nous donne un cosinus négatif $\frac{a}{ z }$</p> <p>Dans le cas où $b \leq 0$ la même relation nous donne un sinus négatif $\frac{b}{ z }$</p>		
Exemple	<p>Soit $z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$; Nous avons $z = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$</p> <p>$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$ et $\sin \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; Nous reconnaissons donc $\alpha = \frac{\pi}{3} [2\pi]$</p>	
Théorème	2 nombres complexes sont égaux ssi ils ont même module et même argument modulo 2π	
Preuve		
S'ils sont égaux alors ils ont évidemment même module et même argument. Réciproquement, s'ils ont même module et même argument $[2\pi]$ alors les deux points dont ce sont les affixes sont confondus. Les affixes sont donc identiques.		
Théorème	Tout nombre complexe z peut se mettre sous la forme $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ avec $r = z $ et $\alpha = \arg(z) [2\pi]$ Cette écriture est la forme trigonométrique de z	
Preuve		
Soit $z = a + ib$. Soit r le module de z et α une mesure de son argument. Nous savons que :		
$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{a}{ z } \\ \text{et} \\ \sin \alpha = \frac{b}{ z } \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = z \cos \alpha \\ \text{et} \\ b = z \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow z = z \cos \alpha + i z \sin \alpha = z (\cos \alpha + i \sin \alpha) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$		
Exemple	<p>Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$. Nous savons $z = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$</p> <p>$z = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$</p>	

Trigonométrie		
Propriétés	Pour tous réels a et b nous avons :	
	1. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	2. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
	3. $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	4. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Preuve

Construisons deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Mais nous avons aussi :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(b - a) = \cos(b - a)$$

Nous avons donc démontré le point 3 :

$$\cos(a - b) = \cos(b - a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

En remplaçant dans cette expression b par $-b$ il vient :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Le point 1 est donc aussi démontré.

Nous savons que $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Donc $\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) =$

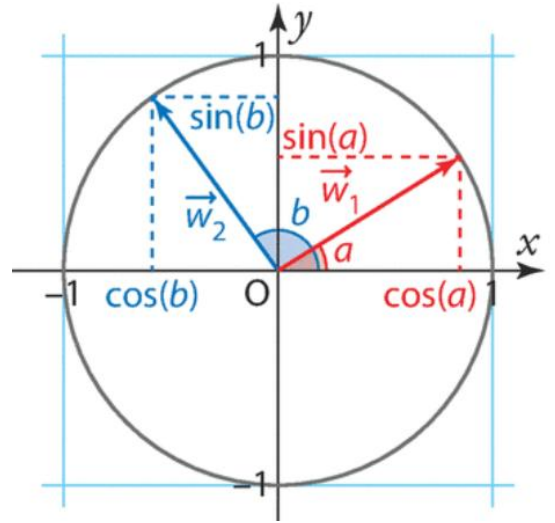
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Le point 2 est donc montré.

Remplaçons ensuite b par $-b$ dans la formule 2. Il vient :

$$\sin(a - b) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Le point 4 est alors démontré.



$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$; Nous avons donc :

Exemple

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Propriété

Pour tout réel a nous avons :

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Preuve

Il suffit de reprendre la formule précédente de $\cos(a + b)$ et de faire $b = a$ pour trouver $\cos 2a$

Il suffit de reprendre la formule précédente de $\sin(a + b)$ et de faire $b = a$ pour trouver $\sin 2a$

Propriétés des arguments

Propriétés	Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.	
	1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$	2. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$
	3. $\forall n \in \mathbb{N}, \arg(z^n) = n\arg(z) [2\pi]$	4. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$

Preuve

Posons $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) [2\pi]$

$$1. \quad zz' = rr'(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = rr'(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\sin \theta \cos \theta' + \sin \theta' \cos \theta))$$

$$zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

Donc $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

$$2. \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)}{r(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)} = \frac{1}{r} \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)}{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \frac{1}{r} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

Donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta [2\pi] = -\arg(z) [2\pi]$

3. Par récurrence. Le cas $n = 1$ est évident.

Supposons qu'à l'ordre n , $\arg(z^n) = n\arg(z) [2\pi]$

$$\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n z) = \arg(z^n) + \arg(z) [2\pi] = n\arg(z) + \arg(z) [2\pi] = (n + 1)\arg(z) [2\pi]$$

La propriété est donc vraie aussi à l'ordre $n + 1$, elle est donc vraie quelque soit n .

$$4. \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z * \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) [2\pi] = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$