Nombres complexes. Cours

Binôme de Newton

Théorème

Soient a et b deux nombres complexes. Soit n un entier naturel.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

Preuve

Par récurrence sur n.
Si $n=1$ c'est évident.
Supposons la propriété vraie à l'ordre n : $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$
Démontrons là à l'ordre $n+1$

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)*(a+b)^n=(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}=\binom{n}{0}a^0b^{n+1-0}+\binom{n}{n}a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^kb^{n+1-k}$$

$$=b^{n+1}+a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n+1$()

Exemple

- $(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}\Leftrightarrow 2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
- $(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k(-1)^{n-k}\Leftrightarrow 0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}=$
  $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}(-1)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$

Exemple

Ce binôme de Newton peut nous aider à calculer des intégrales grâce à la linéarisation.
Le calcul de $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\ dx$. En effet nous ne connaissons pas de primitive à la fonction $x\to\cos^3 x$
Utilisons le binôme de Newton pour $linéariser$ $\cos^3 x$.

$$\cos^3 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=(\frac{1}{8})\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(e^{ix})^k(e^{-ix})^{3-k}$$

$$=\left(\frac{1}{8}\right)\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(e^{ikx})\ \ (e^{-ix(3-k)})\ \ =\left(\frac{1}{8}\right)\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(e^{ikx})\ \ (e^{-ix(3-k)})$$

$$=\left(\frac{1}{8}\right)\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(e^{ix})^{k-(3-k)}=\left(\frac{1}{8}\right)\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(e^{ix})^{2k-3}$$

$$=\left(\frac{1}{8}\right)\left[\binom{3}{0}(e^{-3ix})+\binom{3}{1}(e^{-ix})+\binom{3}{2}e^{ix}+\binom{3}{3}(e^{3ix})\right]=\left(\frac{1}{8}\right)[e^{-3ix}+3e^{-ix}+3e^{ix}+e^{3ix}]$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)\left[\frac{e^{-3ix}+3e^{-ix}+3e^{ix}+e^{3ix}}{2}\right]=\left(\frac{1}{4}\right)[\cos 3x+3\cos x]$$

L'intégrale va maintenant être beaucoup plus simple.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)[\cos 3x+3\cos x]\,dx=\left(\frac{1}{4}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos 3x]\,dx+\left(\frac{3}{4}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos x]dx$$

$$I=\frac{1}{12}[\sin 3x]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left(\frac{3}{4}\right)[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{12}\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{12}+\frac{3}{4}=-\frac{1}{12}+\frac{9}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$