Markov. Cours

Chaînes de Markov	
Définition	On rappelle ici la définition d'une variable aléatoire X Soit Ω un univers de possibilités sur lequel on définit une probabilité P Une variable aléatoire discrète sur l'espace Ω est une fonction de Ω dans un ensemble E dénombrable. Si l'on s'intéresse à l'état d'un système en fonction du temps, étudié en certains instants, on introduit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où X_n désigne l'état du système à l'instant n.
Exemple	On considère une urne contenant 2 boules blanches et 2 boules burnes. On considère l'expérience aléatoire : Je tire une boule au premier tirage et relève la couleur de la boule. Je tire une boule au deuxième tirage, relève la couleur de la boule et remets dans l'urne la 1ere boule. Je tire une boule au troisième tirage, relève la couleur de la boule et remets dans l'urne la 2ème boule. ….. Je tire une boule au n-ième tirage, relève la couleur de la boule et remets dans l'urne la $(n-1)$-ième boule. ….. Nous pouvons donc définir au $n-ième$ tirage une valeur aléatoire X_n qui vaudra 1 si la n-ième est noire et 0 sinon. Dans ce cas, l'ensemble image E vaudra $\{0\,;1\}$
Définition	Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie sur un univers Ω et à valeurs dans un ensemble E On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov** si : pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour toutes valeurs $e_0, e_1, e_2, \dots e_n, e_{n+1}$ prises dans E : $$P_{(X_0=e_0)\cap(X_1=e_1)\dots\cap(X_n=e_n)}(X_{n+1}=e_{n+1})=P_{(X_n=e_n)}(X_{n+1}=e_{n+1})$$ En d'autres termes la probabilité que X_{n+1} prenne une certaine valeur ne dépend que de X_n et pas des variables antérieures. La situation à l'étape $n+1$ ne depend que de l'étape n pas des étapes antérieures.
Exemple	• Reprenons l'exemple précédent : Si à l'étape n une boule noire est choisie cela signifie que à l'étape $n+1$ il y a 2 blanches, 1 noire. Donc $P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{3}$ et $P(X_{n+1}=0)=\frac{2}{3}$ Si à l'étape n une boule blanche est choisie cela signifie que à l'étape $n+1$ il y a 1 blanches, 2 noires. Donc $P(X_{n+1}=0)=\frac{2}{3}$ et $P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{3}$; L'étape $n+1$ ne dépend que de la situation à l'étape n. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une chaîne de Markov. • Une suite de variables aléatoires indépendantes est une chaîne de Markov.
Définition	On appelle espace d'états d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'espace image E des variables aléatoires X_n