Nombres complexes. Cours

<table>
<tr><th colspan="3">Nombres complexes</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="2">Il existe un nombre nommé i tel que $i^2 = -1$
L'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme $a + ib$ avec a et b réels est appelé l'ensemble des nombres complexes. Il se note $\mathbb{C}$.
Lorsque $z = a + ib$.
a est appelé partie réelle de z et est noté $\Re(z)$
b est appelé partie imaginaire de z et est noté $\Im(z)$
L'écriture $a + ib$ est appelée forme algébrique de z</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="2">Si $z = 3 - 4i$ alors $\Re(z) = 3$ et $\Im(z) = -4$</td></tr>
<tr><td>Remarque</td><td colspan="2">Lorsque $\Re(z) = 0$ z est alors un nombre dit imaginaire pur.
Lorsque $\Im(z) = 0$ z est alors un nombre réel.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Propriétés</td><td colspan="2">On munit $\mathbb{C}$ d'une addition et d'une multiplication définies ainsi :
Soient $z = a + ib$ et $z' = c + id$.</td></tr>
<tr><td>$z + z' = (a + c) + i(c + d)$</td><td>$zz' = (a + ib)(c + id)$
$zz' = ac - bd + i(bc + ad)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ces deux opérations possèdent les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>Théorème</td><td colspan="2">Soient z et z' deux complexes. $z = z' ssi \begin{Bmatrix} \Re(z) = \Re(z') \\ et \\ \Im(z) = \Im(z') \end{Bmatrix}$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Preuve</th></tr>
<tr><td colspan="3">Soient $z = a + ib$ et $z' = c + id$ avec $a, b, c\ et\ d$ réels.
Si $a = c$ et $b = d$ alors $z = z'$
Réciproquement : supposons . $z = z'$ $\Leftrightarrow a + ib = c + id \Leftrightarrow a - c = i(b - d)$
Si $b \neq d$ nous avons $i = \frac{(a-c)}{b-d}$ ce qui est absurde car $\frac{(a-c)}{b-d}$ est réel. Donc $b = d$ ce qui implique $a = c$</td></tr>
<tr><td>Remarque</td><td colspan="2">Le théorème précédent implique :
l'unicité de l'écriture d'un nombre complexe.
$z = 0\ ssi\ \Re(z) = 0$ et $\Im(z) = 0$</td></tr>
</table>