Nombres complexes. Cours

conjugué dans $\mathbb{C}$

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec a et b réels.
On appelle conjugué de z que l'on note $\bar{z}$ le nombre $a - ibS$

Exemple

Soit $z = 3 - 4i$. $\bar{z} = 3 - (-4i) = 3 + 4i$

Propriétés

Pour tout nombre complexe z :

$z + \bar{z} = 2\Re(z)$	$z - \bar{z} = 2i\Im(z)$	$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$	$z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$	$z = \overline{(\bar{z})}$

Preuve

Posons $z = a + ib$

- $z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\Re(z)$
- $z - \bar{z} = a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i\Im(z)$
- $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $z = -\bar{z} \Leftrightarrow a + ib = -(a - ib) \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$
- $z = \overline{(\bar{z})} \Leftrightarrow z = \overline{(a - \imath b)} = a + ib = z$

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z'

$\overline{(-z)} = -\bar{z}$	$\overline{z * z'} = \bar{z} * \bar{z'}$	$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$	$\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = (\bar{z})^n$	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

Preuve

Posons $z = a + ib$ et $z' = c + id$

- $\overline{(-z)} = \overline{(-a - \imath b)} = -a + ib = -(a - ib) = -\bar{z}$
- $\overline{z + z'} = \overline{(a + c + \imath(b + d))} = a + c - i(b + d) = a - ib + c - id = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{z * z'} = \overline{(a + \imath b)(c + \imath d)} = \overline{ac - bd + \imath(bc + da)} = ac - bd - i(bc + da)$
  $\bar{z} * \bar{z'} = (a - ib)(c - id) = ac - bd - i(bc + da) = \overline{z * z'}$
- Par recurrence sur n
  Le cas $n = 1$ est évident.
  Supposons $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
  $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n * z} = \overline{z^n} * \bar{z}$ (point précédent)
  $= (\bar{z})^n * \bar{z} = (\bar{z})^{n+1}$
- $z * \left(\frac{1}{z}\right) = 1 \Rightarrow \overline{z * \left(\frac{1}{z}\right)} = \bar{1} \Rightarrow \bar{z} * \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1 \Rightarrow \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z * \left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} * \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$