

Arithmétique. Cours

Equation diophantienne

| | |
|-------------------|--|
| Définition | Une équation diophantienne est une équation du type : $ax + by = c$ Où a, b et c sont des coefficients entiers relatifs. x et y sont des inconnues dont les valeurs sont à trouver dans \mathbb{Z} |
| Propriété | Une telle équation admet des solutions si c est un multiple de $PGCD(a, b)$ |

Preuve

a et b sont multiples de $PGCD(a, b)$. Donc toute combinaison linéaire de a et b du type $ax + by$ est multiple de $PGCD(a, b)$. Chercher des solutions à l'équation $ax + by = c$ n'a de sens que si c est multiple de a et de b

Exemples et Méthode

- L'équation $15x + 27y = 2$ n'admet pas de solutions car $PGCD(15, 27) = 3$ et 3 ne divise pas 2.
- L'équation $17x - 33y = 2$ (*) admet des solutions. En effet $PGCD(17, 33) = 1$ et 2 est multiple de 1
Trouvons ces solutions :
La première étape consiste à trouver x et y tels que $17x - 33y = PGCD(17, 33) = 1$
Pour cela utilisons l'algorithme d'Euclide.

$$33 = 17 * 1 + 16$$

$$17 = 16 * 1 + 1$$

Donc $1 = 17 - 16 = 17 - (33 - 17) = 2 * 17 - 33$

Nous avons donc $17 * 2 - 33 * 1 = 1 \Rightarrow 17 * 4 - 33 * 2 = 2$

Nous avons donc trouvé une solution particulière à l'équation diophantienne.

Il faut maintenant trouver une solution générale.

(x, y) solution de (*) ssi $17x - 33y = 2$

Nous avons donc $\begin{cases} 17x - 33y = 2 \\ 17 * 4 - 33 * 2 = 2 \end{cases}$. En retranchant ces deux équations il vient :

(x, y) solution de (*) ssi $17(x - 4) - 33(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 17(x - 4) = 33(y - 2)$ (**)

$17 \mid 33(y - 2)$. Or 17 et 33 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss $17 \mid y - 2$

$$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } y - 2 = 17k$$

$33 \mid 17(x - 4)$. Or 17 et 33 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss $33 \mid x - 4$

$$\exists k' \in \mathbb{Z} \text{ tq } x - 4 = 33k'$$

Mais si $y - 2 = 17k$ et $x - 4 = 33k'$, (**) devient $17 * 33k' = 33 * 17 * k \Leftrightarrow k = k'$

Donc (x, y) solution de (*) $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \begin{cases} y - 2 = 17k \\ x - 4 = 33k \end{cases} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \begin{cases} y = 17k + 2 \\ x = 33k + 4 \end{cases}$

Réciproquement est ce que tous ces les couples (x, y) tels que $\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \begin{cases} y = 17k + 2 \\ x = 33k + 4 \end{cases}$ sont solutions de (*) ?

$$17(33k + 4) - 33(17k + 2) = 17 * 4 - 33 * 2 = 2$$

Donc oui tous ces couples sont solution.

Nous avons donc :

$$(x, y) \text{ solution de } 17x - 33y = 2 \text{ ssi } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \begin{cases} y = 17k + 2 \\ x = 33k + 4 \end{cases}$$

- L'équation $6x + 10y = 14$ (*) admet des solutions car $PGCD(6, 10) = 2$ et $2 \mid 14$
Divisons cette équation par $PGCD(6, 10) = 2$
(*) devient $3x + 5y = 7$

Nous sommes donc ramenés au cas précédent où les coefficients a et b sont premiers entre eux. La méthode est donc la même. Cherchons tout d'abord (x, y) tels que $3x + 5y = 1$

$$5 = 3 * 1 + 2$$

$$3 = 2 * 1 + 1$$

Donc $1 = 3 - 2 * 1 = 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 * 3 - 5$

Nous avons $3 * 2 - 5 * 1 = 1 \Rightarrow 3 * 14 - 5 * 7 = 7$

(x, y) solution de (*) ssi $3x + 5y = 7$. Or $3 * 14 - 5 * 7 = 7$ donc en retranchant ces deux égalités nous avons :

$$(x, y) \text{ solution de (*)} \Rightarrow 3(x - 14) + 5 * (y + 7) = 0 \Leftrightarrow 3(x - 14) = -5(y + 7) (**)$$

$$3 \mid -5(y + 7) ; 3 \text{ et } 5 \text{ sont premiers entre eux, donc } 3 \mid y + 7 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } y + 7 = 3k$$

$$5 \mid 3(x - 14) ; 3 \text{ et } 5 \text{ sont premiers entre eux, donc } 5 \mid x - 14 \\ \exists k' \in \mathbb{Z} \text{ tq } x - 14 = 5k'$$

Mais si $y + 7 = 3k$ et $x - 14 = 5k'$ alors (**) devient $3 * 5k' = -53k \Rightarrow k = -k'$

$$\text{Donc } (x, y) \text{ solution de (*)} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \begin{cases} x - 14 = -5k \\ y + 7 = 3k \end{cases} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \begin{cases} x = 14 - 5k \\ y = -7 + 3k \end{cases}$$

Réciproquement est ce que tous ces les couples (x, y) tels que $\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \begin{cases} x = 14 - 5k \\ y = -7 + 3k \end{cases}$ sont solutions de (*) ?

$$3(14 - 5k) + 5(-7 + 3k) = 42 - 35 = 7$$

Donc oui tous ces couples sont solutions.

$$(x, y) \text{ solution de } 3x + 5y = 7 \text{ ou } 6x + 10y = 14 \text{ ssi } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \begin{cases} y = 17k + 2 \\ x = 33k + 4 \end{cases}$$