Markov. Cours

Graphes associés à des chaînes de Markov	
Propriété	Comment passer d'un état à un autre en m étapes ? C'est à cette question que répond la propriété suivante : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q avec $E=\{e_j\,;1\leq j\leq N\}$ Soit $m\in\mathbb{N}^*$.
	La probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes est égale au terme de la i −ième ligne et de la j −ième colonne de la matrice Q^n

Preuve

Nous allons démontrer cette propriété dans le cas $n=2$
Supposons $E=\{1\,;2\}$

Nous voulons démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ Q^n=\begin{pmatrix}P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2)\\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2)\end{pmatrix}$

Par récurrence sur n.

Initialisation : si $n=1$, $Q=\begin{pmatrix}P_{X_0=1}(X_1=1) & P_{X_0=1}(X_1=2)\\ P_{X_0=2}(X_1=1) & P_{X_0=2}(X_1=2)\end{pmatrix}$. La récurrence est donc initialisée.

Hérédité : Supposons que $Q^n=\begin{pmatrix}P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2)\\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2)\end{pmatrix}$.

Posons $Q^n=\begin{pmatrix}Q_{1,1} & Q_{1,2}\\ Q_{2,1} & Q_{2,2}\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}q_{1,1} & q_{1,2}\\ q_{2,1} & q_{2,2}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}Q_{1,1} & Q_{1,2}\\ Q_{2,1} & Q_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{1,1} & q_{1,2}\\ q_{2,1} & q_{2,2}\end{pmatrix}$

$P_{X_0=1}(X_{n+1}=1)=P_{X_0=1}(X_{n+1}=1\cap X_n=1)+P_{X_0=1}(X_{n+1}=1\cap X_n=2)$
$P_{X_0=1}(X_{n+1}=1)=P_{X_0=1\cap X_n=1}(X_{n+1}=1)P_{X_0=1}(X_n=1)+P_{X_0=1\cap X_n=2}(X_{n+1}=1)P_{X_0=1}(X_n=2)$
$P_{X_0=1}(X_{n+1}=1)=P_{X_n=1}(X_{n+1}=1)P_{X_0=1}(X_n=1)+P_{X_n=2}(X_{n+1}=1)P_{X_0=1}(X_n=2)$ (seul l'état précédent compte)
$P_{X_0=1}(X_{n+1}=1)=q_{1,1}Q_{1,1}+q_{2,1}Q_{1,2}$

$P_{X_0=1}(X_{n+1}=2)=P_{X_0=1}(X_{n+1}=2\cap X_n=1)+P_{X_0=1}(X_{n+1}=2\cap X_n=2)$
$P_{X_0=1}(X_{n+1}=2)=P_{X_0=1\cap X_n=1}(X_{n+1}=2)P_{X_0=1}(X_n=1)+P_{X_0=1\cap X_n=2}(X_{n+1}=2)P_{X_0=1}(X_n=2)$
$P_{X_0=1}(X_{n+1}=2)=P_{X_n=1}(X_{n+1}=2)P_{X_0=1}(X_n=1)+P_{X_n=2}(X_{n+1}=2)P_{X_0=1}(X_n=2)$ (seul l'état précédent compte)
$P_{X_0=1}(X_{n+1}=2)=q_{1,2}Q_{1,1}+q_{2,2}Q_{1,2}$

$P_{X_0=2}(X_{n+1}=1)=P_{X_0=2}(X_{n+1}=1\cap X_n=1)+P_{X_0=2}(X_{n+1}=1\cap X_n=2)$
$P_{X_0=2}(X_{n+1}=1)=P_{X_0=2\cap X_n=1}(X_{n+1}=1)P_{X_0=2}(X_n=1)+P_{X_0=2\cap X_n=2}(X_{n+1}=1)P_{X_0=2}(X_n=2)$
$P_{X_0=2}(X_{n+1}=1)=P_{X_n=1}(X_{n+1}=1)P_{X_0=2}(X_n=1)+P_{X_n=2}(X_{n+1}=1)P_{X_0=2}(X_n=2)$ (seul l'état précédent compte)
$P_{X_0=2}(X_{n+1}=1)=q_{1,1}Q_{2,1}+q_{2,1}Q_{2,2}$

$P_{X_0=2}(X_{n+1}=2)=P_{X_0=2}(X_{n+1}=2\cap X_n=1)+P_{X_0=2}(X_{n+1}=2\cap X_n=2)$
$P_{X_0=2}(X_{n+1}=2)=P_{X_0=2\cap X_n=1}(X_{n+1}=2)P_{X_0=2}(X_n=1)+P_{X_0=2\cap X_n=2}(X_{n+1}=2)P_{X_0=2}(X_n=2)$
$P_{X_0=2}(X_{n+1}=2)=P_{X_n=1}(X_{n+1}=2)P_{X_0=2}(X_n=1)+P_{X_n=2}(X_{n+1}=2)P_{X_0=2}(X_n=2)$ (seul l'état précédent compte)
$P_{X_0=1}(X_{n+1}=2)=q_{1,2}Q_{2,1}+q_{2,2}Q_{2,2}$

Nous avons donc bien : $\begin{pmatrix}P_{X_0=1}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=1}(X_{n+1}=2)\\ P_{X_0=2}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=2}(X_{n+1}=2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_{1,1} & Q_{1,2}\\ Q_{2,1} & Q_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{1,1} & q_{1,2}\\ q_{2,1} & q_{2,2}\end{pmatrix}=Q^nQ=Q^{n+1}$

L'hypothèse de récurrence est donc vérifée au rang $n+1$.
Elle est donc vraie quelque soit $n\in\mathbb{N}$

Nous avons donc bien $\forall n\in\mathbb{N}^*, Q^n=\begin{pmatrix}P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2)\\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2)\end{pmatrix}$

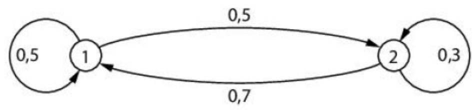
Ou dit autrement : La probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes est égale au terme de la i −ième ligne et de la j −ième colonne de la matrice Q^n

Exemple

Soit la chaîne de Markov représentée par le graphe probabiliste suivant.
La matrice de transition associée à cette chaîne est :

$$Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Pour connaitre la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 en 3 étapes : $P_{X_0=1}(X_3 = 2)$ il nous faut donc calculer Q^3



$$Q^3 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0,58 & 0,42 \\ 0,588 & 0,412 \end{pmatrix}$$

$Q^3 = \begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_3 = 1) & P_{X_0=1}(X_3 = 2) \\ P_{X_0=1}(X_3 = 2) & P_{X_0=2}(X_3 = 2) \end{pmatrix}$ donc :

$$P_{X_0=1}(X_3 = 2) = 0,42$$

Définition

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q avec $E = \{e_j\,; 1 \leq j \leq N\}$
On considère π_n la matrice ligne suivante $\pi_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad \dots \quad P(X_n = N))$

On appelle π_n la **distribution** après n étapes.
On appelle π_0 la **distribution initiale**.

Propriété

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q avec $E = \{e_j\,; 1 \leq j \leq N\}$
Soit π_n la distribution après n étapes.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_{n+1} = \pi_n Q, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n = \pi_0\, Q^n$$

Preuve

Posons $Q = ((q_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq N \\ 1\leq j\leq N}}$

$$P(X_{n+1} = i) = \sum_{k=1}^{N} P(X_{n+1} = i \cap X_n = k) = \sum_{k=1}^{N} P(X_{n+1} = i \cap X_n = k) = \sum_{k=1}^{N} P_{X_n=k}(X_{n+1} = i)P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{N} q_{k,i}P(X_n = k)$$

Nous avons bien :

$$(P(X_{n+1} = 1) \quad P(X_{n+1} = 2) \quad \dots \quad P(X_{n+1} = N)) = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad \dots \quad P(X_i = N))\, Q$$

La dernière partie de la propriété se démontre par récurrence.
Le cas $n = 1$ est évident puisque $\pi_1 = \pi_0 Q$
Supposons la propriété vraie au rang n : $\pi_n = \pi_0\, Q^n$
Nous avons $\pi_{n+1} = \pi_n Q = \pi_0\, Q^n Q = \pi_0 Q^{n+1}$

La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$ et est donc vraie quelque soit n.

Nous avons bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n = \pi_0\, Q^n$

Propriété

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q avec $E = \{e_j\,; 1 \leq j \leq N\}$
Soit π_n la distribution après n étapes.
S'il existe un entier n tel que la matrice Q^n ne contienne pas de 0 alors la suite de matrice $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice π solution de $\pi = \pi Q$

Preuve

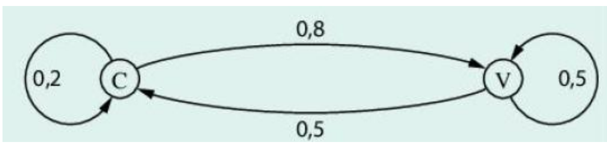
Admise**.**

Remarque

- Le fait qu'il n'y ait pas de 0 dans Q^n signifie qu'il est possible de passer d'un état quelquonque à un autre en n étapes.
- En particulier si la matrice Q n'admet pas de 0 alors la suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers π

Exemple

On a programmé un ordinateur pour qu'il affiche successivement des lettres qui sont soit des consonnes soit des voyelles selon le graphe probabiliste ci-contre.



- On suppose que la première lettre est une consonne, calculer la probabilité que la cinquième lettre soit une consonne.
- Déterminer la distribution invariante de ce système. Interpréter le résultat.

	La matrice de transition de ce système est $\begin{pmatrix}0,2 & 0,8\\0,5 & 0,5\end{pmatrix}$; En appelant X_n la variable aléatoire valant $'C'$ ou $'V'$ à l'étape n $\begin{pmatrix}0,2 & 0,8\\0,5 & 0,5\end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix}0,3896 & 0,6104\\0,3815 & 0,615\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P_{(X_0=C)}(X_4 = C) & P_{(X_0=C)}(X_4 = V)\\P_{(X_0=V)}(X_4 = C) & P_{(X_0=V)}(X_4 = V)\end{pmatrix}$ Donc $P_{(X_0=C)}(X_5 = C) = 0,3896$ Soit $\pi = (x \quad y)$ la distribution invariante. $(x \quad y) = (x \quad y)\begin{pmatrix}0,2 & 0,8\\0,5 & 0,5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0,2x + 0,5y\\y = 0,8x + 0,5y\end{cases} \Leftrightarrow 0,8x = 0,5y$ Par ailleurs nous savons que $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$ Donc $0,8x = 0,5(1 - x) \Rightarrow 1,3x = 0,5 \Rightarrow x = \frac{1}{2,6} = \frac{5}{13} \Rightarrow y = 1 - \frac{5}{13} = \frac{8}{13}$ La matrice Q ne contient pas de 0 donc la suite de matrices $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi = (\frac{5}{13} \quad \frac{8}{13})$ La probabilité d'avoir une consonne tend vers $\frac{5}{13}$ La probabilité d'avoir une voyelle tend vers $\frac{8}{13}$