

Divisibilité dans \mathbb{Z}			
Rappels	<ul style="list-style-type: none"> L'ensemble des entiers naturels noté \mathbb{N} est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ L'ensemble des entiers relatifs noté \mathbb{Z} est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif ou négatif. $= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 		
Exemples	<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">$\frac{6}{3} \in \mathbb{N}$ car $\frac{6}{3} = 2$</td> <td style="border: none; text-align: center;">$-45 \in \mathbb{Z}$</td> </tr> </table>	$\frac{6}{3} \in \mathbb{N}$ car $\frac{6}{3} = 2$	$-45 \in \mathbb{Z}$
$\frac{6}{3} \in \mathbb{N}$ car $\frac{6}{3} = 2$	$-45 \in \mathbb{Z}$		
Axiomes de \mathbb{N}	<ul style="list-style-type: none"> Principe du bon ordre : toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément Principe de la descente infinie : Toute suite dans \mathbb{N} strictement décroissante est finie Principe des tiroirs : Si l'on range $n + 1$ chaussettes dans n tiroirs, il y aura forcément au moins deux chaussettes dans un tiroir. 		
Définition	<p>Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que a divise b ou que b est divisible par a, ou que b est un multiple de a lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $b = ak$</p> <p>On note alors $a \mid b$ que l'on prononce « a divise b »</p>		
Exemples	-15 est un multiple de 3 car $-15 = 3 * 5$ donc $3 \mid -15$		
Cas particuliers	<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="border: none; text-align: center;"> <ul style="list-style-type: none"> 1 divise tout entier relatif </td> <td style="border: none; text-align: center;"> <ul style="list-style-type: none"> 0 est multiple de tout entier relatif </td> </tr> </table>	<ul style="list-style-type: none"> 1 divise tout entier relatif 	<ul style="list-style-type: none"> 0 est multiple de tout entier relatif
<ul style="list-style-type: none"> 1 divise tout entier relatif 	<ul style="list-style-type: none"> 0 est multiple de tout entier relatif 		
Propriété	Soient a et b deux entiers relatifs non nuls : $a \mid b$ et $b \mid a \Rightarrow a = b$ ou $a = -b$		
Preuve			
$a \mid b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z} \text{ tq } b = ca$ $b \mid a \Rightarrow \exists d \in \mathbb{Z} \text{ tq } a = db$ Donc $a = dca \Rightarrow dc = 1$ car a non nul. Les seules valeurs possibles pour d et c sont $(1; 1)$ ou $(-1; -1)$. cela entraine $b = a$ ou $b = -a$			
Propriété	Soient a, b et c trois entiers relatifs. a divise b et c implique a divise toute combinaison linéaire de b et c		
Preuve			
$a \mid b \Rightarrow \exists d \in \mathbb{Z} \text{ tq } b = da$ $a \mid c \Rightarrow \exists e \in \mathbb{Z} \text{ tq } c = ea$ Soit $\alpha b + \beta c$ une combinaison linéaire quelconque de b et c avec α et β entiers relatifs. $\alpha b + \beta c = \alpha da + \beta ea = a(\alpha d + \beta e)$ Donc $a \mid \alpha b + \beta c$			
Exemple	La propriété précédente peut parfois être très utile. Soit $a = 9k + 2$ et $b = 12k + 1$ deux entiers relatifs. Nous cherchons des diviseurs communs à a et b Soit c un tel diviseur. Il divise aussi $4a - 3b = 4(9k + 2) - 3(12k + 1) = 36k + 8 - 36k - 3 = 5$ Un tel diviseur est donc 1 ou 5 .		